1 Симметрия и теория групп

1.1 Роль симметрии в физике

Понятие симметрий играет одну из важнейших ролей в современной физике. Чтобы понять причину столь высокого её значения, необходимо вспомнить основную задачу физики как науки:

Физика занимается поиском уравнений, описывающих мир.

Соответственно, у физиков должен быть метод поиска таких уравнений. И применение симметрии как руководящего принципа в данной задаче оказалось крайне эффективно. Причём как со стороны экспериментальной физики, так и теоретической.

Качественно говоря, симметрия — это неотличимое преобразование системы. Если экспериментально установлен полный набор симметрий некоторой системы, то задача поиска соответствующих уравнений сильно упрощается: не нужно перебирать всевозможные уравнения, достаточно ограничиться только теми, которые имеют все требуемые симметрии. Так симметрия помогает перейти от эксперимента к построению модели явления.

Ещё один пример, демонстрирующий важность понятия симметрий с экспериментальной точки зрения — это поиск сохраняющихся величин. Масса, импульс или электрический заряд — все эти сохраняющиеся величины существуют только потому, что законы физики обладают определенными симметриями. Например, если бы электромагнетизм не обладал так называемой $U(1)$ симметрией, то и не было бы понятия электрического заряда. Обнаружение сохраняющейся величин указывает на наличие некоторой симметрии, что, в свою очередь, помогает построить физическую модель.

Понятие симметрии оказалось полезным также и с теоретической точки зрения. В качестве примера можно вспомнить историю создания специальной теории относительности. Выведенные Максвеллом уравнения элетродинамики имели симметрию Лоренца, в то время как все остальные области физики обладали галилеевской инвариантностью. Можно сказать, что специальная теория относительности родилась из вопроса какая из этих двух симметрий является “настоящей” симметрией природы. Предложенная сначала как теоретическая модель, обобщающая симметрию Лоренца на механику, она получила экспериментальное подтверждение. Это открытие в корне перевернуло взгляд физику на природу пространства и времени.

Как другой пример, рассмотрим общую теорию относительности. Её математическая основа проста — физические законы не могут зависеть от выбора параметризации координат. Требование данной симметрии, называемой диффеоморфизм-инвариантностью, и привело к созданию общей теории относительности.

В физике есть ряд проблем, которые уже некоторое время пытаются решить привлекая симметрийные соображения. Например, неизвестна причина (если она, конечно, есть) почему мы наблюдаем ровно столько фундаментальных частиц, сколько было обнаружено в экспериментах? Почему не больше и не меньше? В попытке ответа на этот вопрос родилась суперсимметрия и теории Великого объединения. Были проведено множество различных экспериментальных проверок данных теорий, но пока не одна из них не подтвердилась.

Наконец, необходимо сказать, что понятие симметрии позволяет проклассифицировать всевозможные наблюдаемые. Так, наличие симметрии Лоренца однозначно фиксирует возможные спины частиц — он может быть только целым или полуцелым числом. Соответственно, все частицы являются либо бозонами, либо фермионами, иного не может быть. При этом сами частицы могут быть сколь угодно сложными системами, как, например, протоны, состоящие из кварков. Но, как целый объект, протоны являются фермионами.

Таким образом, понятие симметрий оказывается крайне полезным для возможности продвижения в физике. Теоретические модели, пытающиеся решить те или иные проблемы, мотивируют постановку экспериментов. Последние снабжают физиков новыми данными, позволяя строить новые модели. И на обоих концах понятие симметрии оказывается очень полезным.

1.2 Понятие симметрии и её связь с теорий групп

Дадим более строгое определение симметрии:

◯ Пусть $\mathcal{M} = \{\Phi, O\}$ — множество некоторых объектов и наблюдаемых величин соответственно. Преобразование $F: \ \mathcal{M} \to \tilde{\mathcal{M}} = \{\tilde{\Phi}, \tilde{O}\}$ называется симметрией, если $\tilde{O} = O$.

Объектами и наблюдаемые могут иметь самую различную природу. Поясним смысл этих терминов и определения на паре примеров.

Пример 1. Рассмотрим систему, состоящую из 4х неотличимых частиц:

Рис. 1: 4 неотличимые частицы.

Поскольку частицы неразличимы, единственной наблюдаемой величиной является количество частиц. Это означает, что можно произвольным образом переставлять частицы, наблюдаемые от этого не меняются. Иначе говоря — произвольные перестановки 4х элементов являются симметрией данной системы.

Данный пример достаточно прямолинейно обобщается на случай правильных многоугольников. Наблюдаемая величина в этом случае — это фигура как целое, а симметрии —

множество всевозможных перестановок вершин и исходящих из них граней, оставляющих фигуру неизменной.

Пример 2. В качестве объектов и наблюдаемых можно рассматривать и более абстрактные величины, такие как преобразования координат и физические законы. Рассмотрим некоторую частицу, двигающуюся в пространстве, считая, что её динамика подчиняется второму закону Ньютона,

$$F_i = m\ddot{x}_i \; . \tag{1}$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени, а нижний индекс обозначает одну из пространственных компонент. Объектами в этом случае являются координаты и сама частица, в то время как наблюдаемой величиной — траектория частицы. Поскольку траектория частицы сводится к установлению закона, по которому она движется, то можно считать, что наблюдаемая величина — это сам второй закон Ньютона. Тогда симметриями системы являются преобразование координат, оставляющих вид уравнения (1) неизменным. Такие преобразования известны как преобразования Галиллея,

$$\tilde{x}_i = x_i + v_i t \, , \qquad \tilde{t} = t + c \; , \tag{2}$$

где v_i — это компоненты вектора скорости, t — время, а c — некоторая константа. Таким образом, и в указанном смысле, преобразования Галлилея являются симметриями классической механики.

Симметриями специальной теории относительности являются преобразования Лоренца,

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - v_i t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \, , \qquad \tilde{t} = \frac{t - \frac{v_i x_i}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \; , \tag{3}$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование и $v^2 = v_i v_i$. Именно они являются настоящими, полными симметриями механики. Как видно, в пределе $v \ll c$ они совпадают с преобразованиями Галлилея. Это означает, что Галилеевская симметрия является приближенной симметрией природы, справедливой только в пределе $v \ll c$.

Выделяют 3 категории симметрий: внутренние, пространственно-временные и смешанные. Внутренние симметрии не затрагивают преобразования координат. Например, перестановка 4х неразличимых объектов — это внутренняя симметрия. При пространственно-временных симметриях преобразуются только координаты. Упомянутые выше преобразования Галлилея или Лоренца как симметрии механики являются примерами подобной симметрии. Наконец, смешанные симметрии — это одновременные преобразования координат и объектов. Та же симметрия Лоренца, рассматриваемая в контексте классической или квантовой теории поля, будет действовать как на поля, так и на координаты.

В качестве ещё одного примера внутренних симметрий рассмотрим пространство комплексных функций, зависящих от трехмерного вектора $\vec{x}$ и времени, $\Psi(x, t)$. Для удобства, будем обозначать подобные функции как

$$|\Psi\rangle \ . \tag{4}$$

Пусть далее на пространстве таких функций введено понятие (комплекснозначного) скалярного произведения функций Ψ и Φ как умножение комплексного сопряжения Ψ на Φ,

$$\langle\Psi|\Phi\rangle \equiv \Psi^*\Phi \ . \tag{5}$$

В этом построении объектами являются функции, а наблюдаемыми — нормы векторов (скалярное произведение $|\Psi\rangle$ с самой собой). Симметрия подобной системы — это умножение функций на произвольное комплексное число единичной нормы,

$$|\tilde{\Psi}\rangle = e^{i\alpha}\,|\Psi\rangle \ , \quad \alpha \in \mathcal{R} \ . \tag{6}$$

Подобная конструкция имеет место в квантовой механике, где $|\Psi\rangle$ интерпретируется как волновая функция частицы, а норма $|\Psi\rangle$ как вероятность обнаружения частицы в заданном состоянии.

Для поиска симметрий и построения теория с заданными симметриями необходимо знать какие бывают симметрии вообще. Чтобы установить их полный список, необходимо найти подходящую математическую абстракцию, которая наиболее полно отображала бы алгебраические свойства симметрий. Если $\mathcal{F}$ — множество всех симметрий некоторой системы, то выполняется следующее:

1. Тождественное преобразование является симметрией: $\hat{1} \in \mathcal{F}$.

2. Если $f \in \mathcal{F}$, то обратное преобразование также симметрия: $f^{-1} \in \mathcal{F}$.

3. Если $f_1,\ f_2 \in \mathcal{F}$, то композиция преобразований также симметрия: $(f_1 \cdot f_2) \in \mathcal{F}$.

Наиболее близко данная структура охватывается понятиями группы и их представлений.
◯ Множество $G = \{g\}$ с введённой на нём операцией «$\cdot$»: $G \times G \to G$, называемой групповым умножением, называется группой, если:

1. В G есть единичный элемент: $\exists\ e \in G:\ \forall g \in G \hookrightarrow\ g \cdot e = g$;

2. Для любого элемента существует обратный элемент: $\forall g \in G\ \exists g^{-1}:\ g \cdot g^{-1} = e$;

3. Групповое умножение ассоциативно: $\forall g_1\,, g_2\,, g_3 \in G \hookrightarrow\ (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.

Таким образом группа — это просто множество элементов с хорошо определенным, в указанном выше смысле, умножением.
Пример 1. Множество целых чисел с обычной операцией сложения образуют группу. Единичный элемент в этом случае — 0, а обратный к $z \in \mathcal{Z}$ — это $-z$.

Пример 2. Множество действительных чисел без нуля образуют группу по умножению. Ноль необходимо исключить, поскольку для него не существует обратного элемента.

Когда рассматривались примеры симметрий, речь шла о преобразовании некоторых элементов множества. Чтобы прийти к аналогичной структуре необходимо ввести также понятие представления группы. Оно и будет играть роль преобразований на множестве.

◯ Представлением T группы G в некотором векторном пространстве V называется такое отображение элементов группы в операторы, действующие на пространстве V, что

1. Единичный элемент отображается в единичный оператор: $T(e) = \hat{1}$;

2. Последовательное действие операторов согласовано с групповым умножением: $\forall g_1\,, g_2 \in G \hookrightarrow\; T(g_1 \cdot g_2) = T(g_1)T(g_2)$.

Пример. Группу Лоренца можно определить как набор матриц Λ, оставляющих инвариантной метрику Минковского:

$$\Lambda\eta\Lambda = \eta\,, \quad \eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)\;. \tag{7}$$

Как множество, они представляют собой набор элементов, образующих группу с матричным законом умножения. Формулы преобразования координат (3) являются представлением данных матриц в 4х мерном пространстве Минковского: каждой матрице Λ ставится в соответствие такая же матрица, действующая уже на пространстве Минковского:

$$T(\Lambda) = \Lambda\,, \quad \tilde{x} \equiv T(\Lambda)x = \Lambda x\;. \tag{8}$$

Это одно из возможных представлений группы Лоренца.

Таким образом, понятие группы отображает алгебраическую структуру множества симметрий, а понятие представления группы — преобразования симметрии. Можно сказать, что пространство $\mathcal{M}$ из определения симметрии и есть пространство V в определении представления группы.

2 Конечные группы

Начнём изучение теории групп со знакомства с конечными группами. Это позволит ввести основные определения и продемонстрировать их применение в физике.

2.1 Примеры конечных групп

◯ Число элементов в группе называется порядком группы. Группа называется конечной (дискретной), если число элементов конечно (не более, чем счётно).

Рассмотрим несколько примеров конечных групп.

◯ Группа Z_n — множество целых чисел по модулю n, групповая операция умножения — сложение по модулю n.

Иначе говоря, все числа, отличающиеся на n, отождествлены: $k \simeq k+n$. Z_2 — это множество, состоящих из двух чисел, 0 и 1. Групповое умножение (в данном случае это сложение по модулю) имеет вид

$$0+0=0\,, \quad 0+1=1\,, \quad 1+1=0\,. \tag{9}$$

Недостаток подобного определения в том, что оно привязано к понятию числа. Оказывается удобным абстрагироваться от этого, рассматривая 0 и 1 как некоторые элементы e и a соответственно. Тогда групповое умножение можно представить в виде таблицы:

$$Z_2: \quad \begin{array}{c|c|c} & e & a \\ \hline e & e & a \\ \hline a & a & e \end{array} \tag{10}$$

Подобные таблицы называются таблицами Кэли и читаются слева–вврех: в i-ой строке j-го столбца стоит результат произведения i-го элемента в первом столбце на j-го элемента перовой строчки (не наоборот).

◯ Таблица Кэли — таблица, описывающая алгебраические структуры в некотором множестве (в данном случае групповое умножение в группе).

Любая таблица Кэли, если представленной в ней умножение ассоциативно, соответствует некоторой группе. Таким образом, ассоциативная таблица Кэли однозначно определяет группу. Это позволяет думать о группе как о некотором абстрактом объекте с хорошо определенным законом умножения.

В качестве примера, приведём также таблицу Кэли для группы Z_3:

$$Z_3: \quad \begin{array}{c|c|c|c} & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ \hline a & a & b & e \\ \hline b & b & e & a \end{array} \tag{11}$$

Задача. Показать, что в таблицах Кэли, описывающих группы, каждый элемент встречается ровно один раз в каждой строке и столбце.

Задача. Анализируя таблицы Кэли, найти всевозможные группы 3-го и 4-го порядков.

Рассмотрим ещё одну конечную группу, играющую важную роль как в физике, так и математике.

◯ S_n — группа перестановок n неразличимых объектов.

Из комбинаторики известно, что существует n! независимых расстановок n объектов. Поэтому порядок группы S_n — n!. Произвольную перестановку можно записать в виде

$$(1 \to a_1,\ 2 \to a_2,\ \ldots\ ,\ n \to a_n)\ , \tag{12}$$

означающем, что пронумерованный как первый элемент перешёл на позицию a_1, второй — на позицию a_2, и так далее:

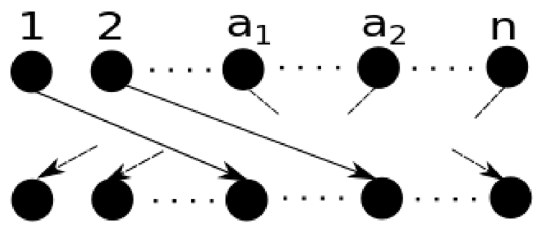


Рис. 2: Произвольная перестановка n элементов.

Для записи произвольных перестановок оказывается полезным понятие цикла:
◯ Циклом длины k называется перестановка вида

$$(a_1 \to a_2,\ a_2 \to a_3,\ ,...,a_k \to a_1) \equiv (a_1,\ a_2,\ ...,\ a_k)\ . \tag{13}$$

Иначе говоря, цикл — это перестановка k элементов между собой, в котором каждый элемент не остался на своём месте. Исключение составляют цикл единичной длины, указывающий, что элемент не был переставлен.

Рассмотрим, как пример, группу S_3. Существует всего шесть независимых перестановок, которые в виде циклов имеют вид

$$e = (1)(2)(3)\ ,\ a_1 = (1,2,3)\ ,\ a_2 = (3,2,1)\ ,\ a_3 = (1,2)(3)\ ,\ a_4 = (1)(2,3)\ ,\ a_5 = (3,1)(2)\ . \tag{14}$$

В записях перестановок единичные циклы, как правило, опускаются: считается, что все опущенные элементы остаются на своих местах. Мы будем придерживаться данного соглашения в дальнейшем.

Пользуясь определением S_3 как группы перестановок неотличимых объектов, можно найти закон группового умножения. Для этого надо применить последовательно две перестановки и представить результат как действие одной перестановки.

Пример. Рассмотрим последовательное применение перестановок, соответствующих a_1 и a_3. Если (условно) пронумеровать 3 объекта как 1, 2 и 3, то имеем:

$$1,\ 2,\ 3\ \xrightarrow{a_1}\ 3,\ 1,\ 2\ \xrightarrow{a_3}\ 1,\ 3,\ 2\ . \tag{15}$$

Как видно из этой цепочки,

$$a_3 \cdot a_1 = a_4\ . \tag{16}$$

Обратим внимание, что a_1 в левой части уравнения стоит на втором месте — сначала применяется она, и только затем a_3.

Рассматривая таким образом всевозможные композиции можно выписать таблицу Кэли для группы S_3:

$$\mathcal{S}_3: \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & e & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \hline e & e & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \hline a_1 & a_1 & a_2 & e & a_5 & a_3 & a_4 \\ \hline a_2 & a_2 & e & a_1 & a_4 & a_5 & a_3 \\ \hline a_3 & a_3 & a_4 & a_5 & e & a_1 & a_2 \\ \hline a_4 & a_4 & a_5 & a_3 & a_2 & e & a_1 \\ \hline a_5 & a_5 & a_3 & a_4 & a_1 & a_2 & e \end{array} \tag{17}$$

Данную таблицу умножения можно считать определением группы S_3 без обращения к ней как группе перестановок 3х объектов.

Задача. Рассмотрим группу S_n. Показать, что произвольную перестановку всегда можно представить в виде произведения циклов (понимаемых как их последовательное применение) с различными элементами. Например, перестановку $(1 \to 3,\ 2 \to 4,\ 3 \to 1,\ 4 \to 1)$ из S_4 можно представить как $(1,\ 3)(2,\ 4)$.

2.2 Основные определения

◯ Группа G называется абелевой, если $\forall g_1\,, g_2 \in G \hookrightarrow g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$. В противном случае группа называется неабелевой.

Пример. S_3 — это неабелева группа, поскольку, например, $a_1 \cdot a_3 \neq a_3 \cdot a_1$. Группы Z_2 и Z_3 — абелевы.

Часто оказывается удобным рассматривать некоторые подмножества группы. На практике это помогает как лучше понять структуру группы, так и найти некоторые из её возможных представлений.

◯ Множество элементов $H = \{h \in G\}$ группы G образуют подгруппу, если H как множество образует группу относительно введенного в G группового умножения.

◯ Группы G_1 и G_2 изоморфны, если существует взаимнооднозначное отображение $f:\ G_1 \to G_2$, сохраняющее групповую структуру:

$$\forall g_1,\ g_2 \in G_1 \hookrightarrow f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \times f(g_2)\ . \tag{18}$$

Здесь «$\cdot$» и «$\times$» обозначают групповую операцию умножения в G_1 и G_2 соответственно.

Пример. Как видно из таблиц Кэли для S_3 и Z_3, элементы $(e,\ a_1,\ a_2)$ из S_3 образуют подгруппу, изоморфную Z_3.

Заметим, что любая группа содержит две так называемые тривиальные подгруппы. А именно, $H = \{e\}$ и $H = G$.

В теории поля важную роль играют так называемые нелинейные представления, с которыми тесно связано понятие смежных классов. Конечные группы позволяют наглядно продемонстрировать данное понятие. Также, с математической точки зрения, это и сопряженные понятия важны для классификация всевозможных представлений конечных групп.
◯ Левым (правым) смежным классом некоторого элемента $g \in G$ по подгруппе H называется множество элементов вида $\{g \cdot h\}$ ($\{h \cdot g\}$) для всех $h \in H$. Множество всех левых (правых) смежных классов обозначается как G/H ($H \backslash G$).

В дальнейшем мы будем рассматривать только левые смежные классы, всё утверждения достаточно просто переносятся на случай правых смежных классов.
Пример. Левым смежным классом элемента $a_3 \in S_3$ по подгруппе $H = \{e,\ a_1,\ a_2\}$ является множество $\{a_3,\ a_4,\ a_5\}$.

Утверждение. Левые смежные классы двух элементов $g_1,\ g_2 \in G$ либо совпадают, либо не пересекаются.

▽ Пусть $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$ — смежные классы элементов g_1 и g_2 соответственно. Если они не пересекаются, то утверждение доказано. Пусть пересечение $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$ не пусто, то есть, $\exists h_1,\ h_2 :\ g_1 h_1 = g_2 h_2$. Тогда в силу того, что H является подгруппой, имеем

$$g_1 h_1 = g_2 h_2 \ \Rightarrow\ g_1 = g_2 (h_2 h_1^{-1}) = g_2 h\ . \tag{19}$$

Таким образом, если $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$ пересекаются, то g_1 принадлежит смежному классу g_2. В силу того, что H является подгруппой, это и означает, что их смежные классы совпадают. △

Следствие. Группа G изоморфна объединению всех её левых смежных классов по некоторой подгруппе, $G = \cup G/H$.
Задача. Описать левый смежный класс S_3/Z_3.
◯ Подгруппа H называется инвариантной подгруппой, если $\forall g \in G \hookrightarrow ghg^{-1} \in H$.
Задача. Убедиться, что Z_3 является инвариантной подгруппой в S_3.

В случае, когда H является инвариантной подгруппой, на множестве всех левых смежных классов оказывается возможным ввести хорошо определенный закон умножения. А именно, будем рассматривать левые смежные классы, каждый по отдельности, как некоторый элемент. Представителем левого смежного класса $\tilde{g} \in G/H$ будем называть произвольный $g \in G$, который также лежит в $\tilde{g}$. Пусть далее $\tilde{g}_1,\ \tilde{g}_2 \in G/H$, $g_1,\ g_2$ являются представителями $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$ соответственно, и $g_1 \cdot g_2 = g_3$ — представитель $\tilde{g}_3 \in G/H$. Тогда произведением $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$ будем называть $\tilde{g}_3$:

$$\tilde{g}_1 \cdot \tilde{g}_2 = \tilde{g}_3\ . \tag{20}$$

Чтобы данное определение не было противоречивым, необходимо, чтобы произведение двух смежных классов не завесило от выбора их представителей. Покажем, что это действительно так. Обозначим как gH произведение g на некоторый элемент из H. Это позволяет записать произвольных представителей $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$ в виде g_1H и g_2H соответственно. Тогда имеем:

$$(g_1H)(g_2H) = g1(Hg_2)H = g_1g2(HH) = (g_1g_2)H = g_3H = \tilde{g}_3 \ , \qquad (21)$$

где были использованы ассоциативность группового умножения и тот факт, что H является инвариантной подгруппой. Приведенная цепочка равенств доказывает утверждение.

Заметим, что: 1) единичным элементов при таком умножении является левый класс смежности $e \in G$; 2) пусть $g \in \tilde{g}$, тогда обратным элементом к $\tilde{g}$ является класс смежности, представителем которого является g^{-1}; 3) закон умножения ассоциативен в силу ассоциативности умножения в G. Комбинируя все результаты, мы доказали следующее:

Утверждение. Пусть H — инвариантная подгруппа в G. Тогда G/H, рассматриваемое как множество всех левых смежных классов, и умножением, заданным формулой (20), является группой, и называется фактор-группой.

Задача. Показать, что S_3/Z_3 является группой, изоморфной Z_2.

Кроме "деления" группы на подгруппу, формализованного в виде определения левого смежного класса G/H, можно ввести понятие "произведения" групп:

◯ Тензорным (прямым) произведением групп G_1 и G_2, обозначаемым как $G = G_1 \otimes G_2$, называется множество упорядоченных пар вида (g_1, g_2), где $g_1 \in G_1, \ g_2 \in G_2$, с операцией группового умножения определенного согласно формуле

$$\forall g_{11}, \ g_{12} \in G_1 \ , \quad g_{21}, \ g_{22} \in G_2 \ , \quad (g_{11}, g_{21}) \cdot (g_{12}, g_{22}) = (g_{11} \cdot g_{12}, g_{21} \cdot g_{22}) \ . \qquad (22)$$

Достаточно легко показать, что тензорное произведение двух групп является группой. При этом выполняются следующие свойства, которые мы сформулируем в виде задачи:

Задача. Доказать, что если G — тензорное произведение групп G_1 и G_2, то G_1 и G_2 являются инвариантными подгруппами в G. Показать также, что G/G_1 изоморфно G_2.

В общем случае, однако, операция тензорного умножения групп не является обратной к построению левого смежного класса по некоторой инвариантной подгруппе: $(G/H)\otimes H \neq G$.

Задача. Выделить в Z_4 подгруппу, изоморфную Z_2, и показать, что она является инвариантной подгруппой. Показать, что $Z_4/Z_2 = Z_2$, но $Z_4 \neq Z_2 \otimes Z_2$.

При рассмотрении некоторой группы G возникает вопрос, можно ли свести алгебраическую структуру G к более простым. Для этого оказывается нужным понятие понятие простых и полупростых групп.

◯ Группа называется простой, если она не имеет нетривиальных инвариантных подгрупп. Группа называется полупростой, если она не содержит абелевых инвариантных подгрупп.

Если группа G не является простой, то есть содержит инвариантную подгруппу H, то в некоторых аспектах изучение её алгебраических свойств сводится к изучение таковых H и G/H. Это позволяет изучать структуру произвольной группы благодаря выделению в ней простых подгрупп (и соответствующих левых классов смежности). Заметим, что все простые группы известны и проклассифицированы.

Наконец, для установления количества различных представлений конечных групп важно понятие классов сопряженных элементов:
◯ Элемент $g_1 \in G$ сопряжен с элементом $g_2 \in G$, если $\exists g \in G:\ g_1 = g \cdot g_2 \cdot g^{-1}$. Классом сопряженности (или классом сопряженных элементов) элемента $g_0 \in G$ называется множество элементов вида $\{g \cdot g_0 g^{-1}\}$ для всех $g \in G$.

Также, как и в случае с левыми смежными классами, можно показать, что группа G распадается на непересекающиеся классы сопряженных элементов. Однако, в отличие от G/H, когда H является инвариантной подгруппой, подобное множество не обладает групповой структурой.
Задача. Найти классы сопряженных элементов S_3. Показать, что на данном множестве групповое умножение, определенное по аналогии с формулой (20), плохо определено.
◯ Элемент g_0 называется самосопряженным, если $\forall g \in G \hookrightarrow g \cdot g_0 \cdot g^{-1} = g_0$. Множество всех подобных g_0 называется центром группы.
Задача. Показать, что центр группы образует абелеву инвариантную подгруппу.

2.3 Представления конечных групп

Представление группы — это её действие в некотором пространстве. Каждая группа имеет конечное количество таких возможных действий. Одним из них всегда является так называемое тривиальное представление:
◯ Тривиальным представлением группы G в некотором векторном пространстве V называется представление, сопоставляющее каждому элементу группы единичный оператор: $\forall g \in G \ \ T(g) = \hat{1}$.

Конечно, этим не исчерпываются всевозможные представления групп. Например, группа Z_2 имеет два различных представления:

- Тривиальное представление: $T(e) = T(1) = \hat{1}$
- $T(e) = \hat{1}\,, \quad T(a) = -\hat{1}.$

Как мы покажем в дальнейшем, любое представление Z_2 сводиться к некоторой комбинации данных двух представлений.
Пример. Определение группы S_n было дано через её действие на n неразличимых объектов. Подобное определение удобно тем, что заранее известно, что перестановки являются симметриями, а потому S_n является группой. С математической точки зрения группа S_n определяется её таблица Кэли.

Если задано действие группы в некотором пространстве V, то оказывается возможным проклассифицировать всевозможные объекты в V в соответствии с тем, как рассматриваемая группа на них действует. Рассмотрим в качестве примера группу Z_2 и пространство функций одной переменной. Пусть $\psi_1(x)$ — некоторая произвольная функция. Определим тогда действие Z_2 на функции следующим образом:

$$T(e)\psi_1(x) = \psi_1(x)\,, \quad T(a)\psi_1(x) = \psi_1(-x) \equiv \psi_2(x)\,. \tag{23}$$

Таким образом, $T(a)$ инвертирует координату. Это является симметрией, поскольку отображает множество всех функций в само себя (дополнительных наблюдаемых нет). В базисе из функций $\psi_1(x),\ \psi_2(x)$ представление Z_2 можно записать в виде матриц:

$$T(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad T(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{24}$$

Действие матриц имело бы максимально простой вид, если каждая из них была бы диагональной. В данном случае этого легко добиться. В базисе из собственных векторов обеих матриц, $\psi_+(x) \equiv \psi_1(x) + \psi_2(x)\,,\ \psi_-(x) \equiv \psi_1(x) - \psi_2(x)$, матрицы представления Z_2 принимают вид

$$T(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad T(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,, \tag{25}$$

и действуют на базисные вектора как

$$T(e)\psi_\pm(x) = +\psi_\pm(x)\,, \qquad T(a)\psi_+(x) = +\psi_+(x)\,,\ T(a)\psi_-(x) = -\psi_-(x)\,. \tag{26}$$

Видно, что действие Z_2 на пространстве функций распалось на два независимых: на действие на чётные и нечётные функции соответственно. При этом выполняются два важных свойства: 1) данные подпространства не пересекаются, и 2) на каждом из них Z_2 действует одним из своих представлений. С точки зрения классификации функций это означает, что существуют только чётные и нечетные функции, и при этом произвольную функцию можно представить в виде суммы последних.

Приведенный пример демонстрирует общий случай понятий неприводимых представлений. А именно:

○ Пусть на пространстве V действуют некоторые операторы $\hat{T}_i$, отображающее V в себя. Тогда подпространство $M \subset V$ называется инвариантным подпространствам, если

$$\forall T_i,\ m \in M \hookrightarrow \hat{T}_i m \subset M\,. \tag{27}$$

Иначе говоря, все вектора из инвариантного пространства остаются в нём же при действии всех операторов $\hat{T}_i$.

◯ Представление группы G в векторном пространстве V называется приводимым, если в V существуют инвариантные подпространства. В противном случае представление называется неприводимым.

В рассмотренном случае инвариантные подпространства — это пространства чётных и нечётных функций. При этом на каждом подпространстве Z_2 действовала по одному из своих неприводимых представлений (у Z_2 их всего два).

В общем случае, из произвольного представления некоторой группы можно всегда выделить неприводимые представления. Поэтому вопрос нахождения всевозможных представлений группы сводится к вопросу установления всех неприводимых представлений данной группы. С физической точки зрения данный вопрос наиболее важен в том плане, что это позволяет проклассифицировать всевозможные объекты по тому, как они преобразуются под действием неприводимых представлений. В силу важности этого утверждения, сформулируем его ещё раз отдельно:

Пусть (некоторое представление) G в пространстве V является симметрией. Тогда все объекты в V можно проклассифицировать по тому, как они преобразуются под действием группы G.

В дальнейшим мы увидим насколько важно данное утверждение в контексте квантовой механики и теории поля.

Для выделения неприводимых представлений оказывается полезным ввести понятие проектора:

◯ Проектором P называется оператор, выделяющий некоторое подпространство из всего пространства.

Поскольку проектор выделяет некоторое подпространство, применение его дважды должно давать тот же результат:

$$P^2 = P \ . \tag{28}$$

Введение понятие проектора позволяет переформулировать определение неприводимого представления следующим образом:

◯ Представление называется приводимым, если существует такой проектор P, что

$$\forall g \in G \hookrightarrow PT(g)P = T(g)P \ . \tag{29}$$

Выписанное требование и означает существование инвариантных подпространств: представление группы оставляет все вектора из подпространства, выделяемого проектором P, в нём же.

В рассмотренном примере действия Z_2 на пространстве функций проектором, выделяющим инвариантное подпространство, был

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{30}$$

Как легко понять, он выделяет компоненту $\psi_+(x)$ произвольной функции. Дополнение данного проектора до единичной матрицы также является проектором (на компоненту $\psi_-(x)$) и выделяет инвариантное подпространство.

Мы видели, что действие Z_2 на пространстве функций диагонализируемо. Подобные представления называются полностью приводимыми:
◯ Представление называется полностью приводимым, если существует базис, в котором $\forall g \in G\ T(g)$ имеет блочно—диагональный вид:

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 & ... & ... \\ 0 & T_2(g) & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & T_n(g) \end{pmatrix} \tag{31}$$

При этом, конечно, каждое из T_i не обязано быть одномерным. Каждое из T_i действует на своём подпространстве $V_i \subset V$ и выделяет из V объекты, преобразующиеся именно таким образом.
Пример. Как известно, группа Лоренца является фундаментальной симметрией природы. Все её неприводимые представления можно разбить на две категории: 1) бозоны, частицы с целых спином, и 2) фермионы, частицы с полуцелым спином. Все наблюдаемые частицы классифицируются именно таким образом. Например, электроны и мюон являются фермионами, а фотон — бозоном.
Пример. Приводимое, но не полностью приводимое представление. Рассмотрим группу целых чисел с групповой операцией сложения. Пусть z — произвольное целое число. Можно легко проверить,

$$T(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

является некоторым двухмерным представлением данной группы. Это представление приводимо, поскольку проектор

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

выделяет инвариантное подпространство. Если бы представление было полностью приводимо, то дополнение данного подпространства до полного также было инвариантным пространством. Однако, как можно убедиться, это не так. Поэтому приведенное представление невозможно привести к блочно–диагональному виду (более компактному, чем изначально).

Приведём несколько примеров применения представлений Z_2 в физике, а именно, в квантовой механики и теории поля (в том числе квантовой). Объектами в этом случае являются функции 3х пространственных координат и одной временной, а наблюдаемыми — соответствующие физические величины в рамках рассматриваемой области физики.

Пример. Р-чётность. Действие Z_2 можно ввести как операцию отражения нечётного числа пространственных координат. Повторяя рассуждения из начала параграфа можно показать, что все функции при этом также разбиваются на чётные и нечётные. Говорят, что чётные функции, на которые Z_2 действуют тривиальным представлением, имеют положительную чётность. Нечётные функции имеют отрицательную чётность — на них Z_2 действует своим вторым неприводимым представлением, меняющим знак у функции при отражении координат.

Пример. Т-чётность (отражение времени). Можно отражать не координаты, а время. Также как и в случае Р-чётности выделяют чётные и нечётные функции.

Пример. РТ-симметрия. В рамках классической механики и специальной теории относительности отражения координат и времени по отдельности не являются симметриями. Только их совместное применение является симметрией (как пример, можно рассмотреть второй закон Ньютона). Подобное одновременное преобразование координат и времени называется РТ-симметрией.

Пример. С-чётность. Группа Z_2 может действовать не только как пространственно-временная симметрия, но и как внутренняя. Так, в рамках квантовой теории поля у каждой частицы есть античастица (возможно, совпадающая с самой частицей). Действие Z_2 можно ввести как замену частицы на античастицу. Аналогичная ситуация имеет место в квантовой механике, когда частица может находиться только в двух возможных состояниях, $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ соответственно. Пространством чётных и нечётных функций в этом случае являются подпространства с базисами

$$|\psi_+\rangle = \frac{|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle}{\sqrt{2}}\,, \quad |\psi_-\rangle = \frac{|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle}{\sqrt{2}} \tag{34}$$

соответственно. Заметим, что в случае n возможных различных состояний все состояние можно проклассифицировать по неприводимым представлениям группы S_n.

Пример. CPT-симметрия. В квантовой теории поля ни одно из C, P или T преобразований или их попарной комбинации не является симметрией. Только их совместное применение, называемое CPT-симметрией, является настоящей симметрией природы.

Вернёмся к обсуждению представлений в общем случае. Фундаментальную роль в классификации всех неприводимых представлений конечной группы играет понятие регулярного представления:

◯ Пусть G — некоторая конечная группа. Определим V как векторное пространство, базисными векторами которого являются элементы G, и будем обозначать их как $|g\rangle$. Регулярным представлением G называется представление G в V, действующее согласно уравнению

$$T(g_1)\,|g_2\rangle = |g_1 \cdot g_2\rangle \ . \tag{35}$$

Задача. Показать, что регулярное представление действительно является представлением.

Пример. Построим регулярное представление Z_3. Порядок группы Z_3 равен трём, поэтому пространством регулярного представления Z_3 является трехмерное векторное пространство с базисными векторами $|e\rangle$, $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$. Представим базисные вектора в виде

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |a_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{36}$$

Построим, например, $T(a_1)$. В соответствии с определением, это должен быть такой оператор, что

$$T(a_1)\,|e\rangle = |a_1\rangle \ , \quad T(a_1)\,|a_1\rangle = |a_2\rangle \ , \quad T(a_1)\,|a_2\rangle = |e\rangle \ . \tag{37}$$

Исходя из этого $T(a_1)$ можно представить в виде матрицы

$$T(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{38}$$

Поступая аналогичным образом можно найти $T(e)$ и $T(a_2)$:

$$T(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad T(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{39}$$

При изучении конкретных представлений групп удобно понятие матричных элементов:
◯ Пусть задано некоторое представление группы G в векторном пространстве V с базисными векторами $|e_i\rangle$. Тогда матричным элементом $T(g)$ называется скалярное произведение

$$T_{ij}(g) = \langle e_j|\, T(g)\, |e_i\rangle \ . \tag{40}$$

Пример. Для регулярного представления ij-ый элемент матрицы $T(g)$ является матричным элементом $T_{ij}(g)$. Например, $T_{32}(a_1) = \langle a_2|\, T(a_1)\, |a_1\rangle = 1$.

Как видно из формулы (40), матричные элементы имеют смысл разложения преобразованного базисного вектора по базису.

В физике важную роль играют так называемые унитарные представления:
◯ Представление называется унитарным, если $\forall g \in G \hookrightarrow T^\dagger(g)T(g) = 1$, где крест означает операцию эрмитова сопряжения.

Грубо говоря, только для таких представлений частицы не рождаются и не исчезают бесследно.

Приведём без доказательства следующее утверждение, играющее фундаментальную роль в теории представлений конечных групп:

Утверждение. Любое представление конечной группы 1) эквивалентно унитарному, 2) полностью приводимо. Также 3) все неприводимые представления группы содержатся в регулярном представлении и 4) их количество равно количеству классов сопряженным элементов.

Таким образом задача классификации всевозможных представлений конечных групп решена. Из последнего утверждения также следует, что Z_2 имеет всего два неприводимых представления, введённых ранее.

Пример. Приведём для справки все неприводимые представления группы S_3.

1) Тривиальное представление: $\forall g \;\; T(g) = 1$.

2) $T(e) = T(a_1) = T(a_2) = 1\,, \quad T(a_3) = T(a_4) = T(a_5) = -1$

3) $$T(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad T(a_1) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\,, \quad T(a_2) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\,,$$
$$T(a_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad T(a_4) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\,, \quad T(a_5) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Задача. Построить регулярное представление S_3 и выделить из него указанные неприводимые представления. Убедиться, что количество неприводимых представлений совпадает с количеством классов сопряженных элементов.

Как видно, одно из неприводимых представлений S_3 двухмерно. В связи с этим заметим, что если выбрать некоторый другой базис в пространстве представления, то явный вид матриц изменится. В связи с этим говорят, что приведенный вид двухмерного представления S_3 является каноническим.

2.4 Заключительный пример

В качестве заключительного примера рассмотрим три одинаковых тела, лежащих на гладкой поверхности в вершинах правильного треугольника, соединённых между собой одинаковыми пружинами. Введём координаты и пронумируем тела так, как указанно на рисунке 3 (окружность единичного радиуса). Теории групп и их представлений оказывается достаточно, чтобы выделить всевозможные независимые движения такой системы. Покажем, как это сделать.

Наблюдаемыми величинами являются положения каждого из тел, то есть шесть чисел

$$(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ x_3,\ y_3)\,. \tag{41}$$

Симметриями является все преобразования системы, которые оставляют эту шестерку чисел неизменными. Поскольку тела неразличимы, то понятно, что искомая симметрия является неким представлением группы S_3. При этом размерность этого представления должна совпадать с количеством наблюдаемых. Таким образом, нам необходимо построить шестимерное представление S_3, которое являлось бы симметрией описанной системы.

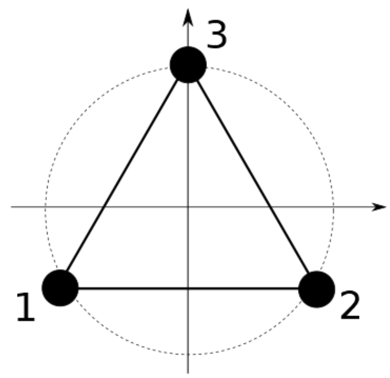


Рис. 3: Три одинаковых тела на гладкой поверхности.

Для построения искомого представления, заметим, что оно должно 1) менять местами тела и 2) менять соответствующим образом координаты тел. Поэтому задачу построения преставления сводится к задачу построения этих двух представлений.

Построим сначала представление, действующее на координаты каждого из тел по отдельности. Поскольку координат две, то оно также должно быть двухмерно. Единственный кандидат на подобное представление — это выписанное ранее двухмерное неприводимое представление S_3. Посмотрим на его действие в явном виде, чтобы понять его смысл. Координаты тел имеют вид

$$1: \ (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), \qquad 2: \ (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), \qquad 3: \ (0, 1) \ . \tag{42}$$

Действие, например, $T_2(a_4)$ переводит их в

$$1: \ (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), \qquad 2: \ (0, \ 1), \qquad 3: \ (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) \ . \tag{43}$$

Вспомним, что a_4 — это перестановка $(2, 3)$. Как видно, $T_2(a_4)$ меняет координаты соответствующих вершин. Это верно для каждого из элементов — $T(a_i)$ будет переставлять местами координаты вершин в соответствии с перестановкой a_i.

Заметим, что мы использовали матрицы представления T_2 в каноническом виде. Как было сказано ранее, это подразумевает выбор определенного базиса в пространстве представления. В нашем случае он совпал с изначально введённым. Так, если бы мы пронумировали тела иначе, то для “согласованности” действия T_2 в терминах перестановок нам бы пришлось переобозначить вершины.

Остаётся построить трехмерное представление T_3 группы S_3, переставляющее между собой вершины как объекты. Его легко построить, введя базис

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ . \tag{44}$$

и потребовать, чтобы $T_3(a_i)$ осуществляла перестановку a_i. Результат имеет вид

$$\begin{gathered}
T_3(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad T_3(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad T_3(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \\
T_3(a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad T_3(a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad T_3(a_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .
\end{gathered} \tag{45}$$

Требуемое нам шестимерное представление S_3 является тензорным произведением построенных представлений T_2 и T_3.

◯ Пусть $T_1,\ T_2$ представления группы G в пространствах V_1 и V_2 соответственно. Тогда тензорным произведением представлений T_1 и T_2 называется представление $T \equiv T_1 \otimes T_2$, действующее в $V = V_1 \otimes V_2$ согласно правилу

$$\forall g \in G\,,\ |i\rangle \in V_1\,,\ |a\rangle \in V_2 : \quad T(g)\,|i,a\rangle = T_1\,|i\rangle \otimes T_2\,|a\rangle \equiv \left|\tilde{i}, \tilde{a}\right\rangle\ , \tag{46}$$

где $|i,a\rangle$ — произвольный элемент из V.

Для рассматриваемого случая пространства V_1 и V_2 являются пространствами координат и тел как объектов соответственно. Искомое шестимерное представление — это $T_6 = T_2 \otimes T_3$. Например, $T_6(a_4)$ имеет вид

$$T_6(a_4) = \begin{pmatrix} T_2(a_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_2(a_4) \\ 0 & T_2(a_4) & 0 \end{pmatrix} . \tag{47}$$

Как можно убедиться явным вычислением, любой подобный элемент оставляет шестерку наблюдаемых (41) неизменной. Таким образом, построенное представление S_3 действительно является симметрией.

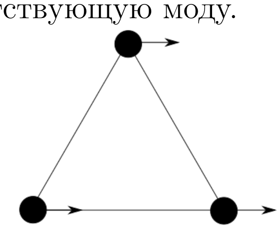
Задача. Пусть $T_1(g)_{ij},\ T_2(g)_{ab}$ — матричные элементы представлений T_1 и T_2 соответственно. Найти матричные элементы тензорного произведения представлений T_1 и T_2.

Для нахождения всевозможных мод движения системы необходимо разложить найденное представление на неприводимые компоненты. Пошаговое выделение всех неприводимых представлений увело бы нас слишком глубоко в математические аспекты теории групп. Поэтому здесь мы приведём только вид базиса, в котором представление имеет блочно-диагональный вид. Это будет достаточно того, чтобы "увидеть" соответствующую моду.

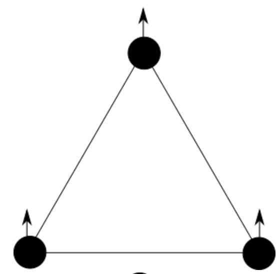
1)

(1, 0, 1, 0, 1, 0):

(горизонтальное движение системы как целого)



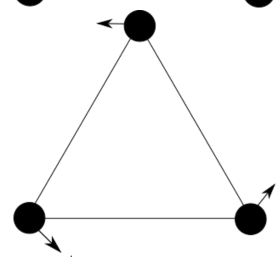
2)



$$(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1):$$

(вертикальное движение системы как целого)

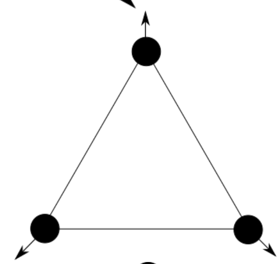
3)



$$(\sqrt{3},\ -3,\ -\sqrt{3},\ 3,\ -2\sqrt{3},\ 0):$$

(вращение системы как целого)

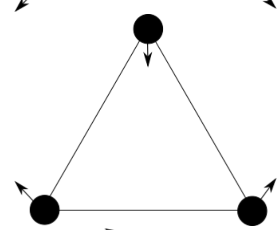
4)



$$(-3,\ -\sqrt{3},\ 3,\ -\sqrt{3},\ 0,\ 2\sqrt{3}):$$

(равномерное сжатие или растяжение)

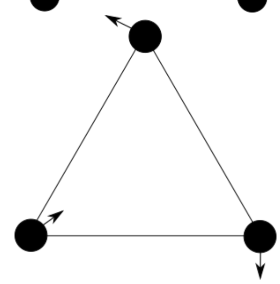
5)



$$(-\sqrt{3},\ 1,\ \sqrt{3},\ 1,\ 0,\ -2):$$

(асимметричное сжатие или растяжение)

6)



$$(\sqrt{3},\ 1,\ 0,\ -2,\ -\sqrt{3},\ 1):$$

(поворот предыдущего движения на $\frac{2\pi}{3}$)

Таким образом, зная только то, что система обладает S_3 симметрией, мы нашли всевозможные моды её движений. Конечно, можно было бы остаться в изначальном базисе, рассматривая изменение каждой из координат по отдельности как возможное движение. Однако в найденном базисе каждое из движений преобразуется по одному из неприводимых представлений группы S_3, что делает его наглядным и удобным.