

# *Симметрии в физике*

Харук И.В.

Лекции по применению теории групп в физике.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Симметрия и теория групп</b>	<b>3</b>
1.1	Роль симметрии в физике . . . . .	3
1.2	Понятие симметрии и её связь с теорией групп . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Конечные группы</b>	<b>9</b>
2.1	Примеры конечных групп . . . . .	9
2.2	Основные определения . . . . .	12
2.3	Представления конечных групп . . . . .	15
2.4	Явное построение симметрий . . . . .	22
2.5	Таблицы Юнга и представления $S_n$ . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Матричные группы и группы Ли</b>	<b>30</b>
3.1	Матричные группы . . . . .	30
3.2	Линейные представления матричных групп . . . . .	31
3.3	Группы Ли . . . . .	37
3.4	Алгебры Ли . . . . .	38
3.5	Представления групп и алгебр Ли . . . . .	42
3.6	Компактные группы Ли . . . . .	47
<b>4</b>	<b><math>SU(2)</math> и квантовая механика</b>	<b>49</b>
4.1	Конечномерные представления $ASU(2)$ . . . . .	49
4.2	Квантовые числа . . . . .	54
4.3	Выделение неприводимых представлений . . . . .	58
4.4	Собственные функции . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Группа Пуанкаре</b>	<b>66</b>
5.1	Структура группы Лоренца . . . . .	66
5.2	Алгебра группы Лоренца . . . . .	67
5.3	Тензора . . . . .	69
5.4	Спиноры . . . . .	72
5.5	Неоднородные симметрии . . . . .	78

# 1 Симметрия и теория групп

## 1.1 Роль симметрии в физике

Понятие симметрий играет одну из важнейших ролей в современной физике. Чтобы понять причину столь высокого её значения, необходимо вспомнить основную задачу физики как науки:

*Физика занимается поиском уравнений, описывающих явления.*

Соответственно, у физиков должен быть конструктивный метод поиска подобных уравнений. Применение симметрии как руководящего принципа в этой задаче оказалось крайне эффективно. Причём как со стороны экспериментальной физики, так и теоретической.

Качественно говоря, симметрия — это неотличимое преобразование системы. Если экспериментально установлен полный набор симметрий некоторой системы, то задача поиска соответствующих уравнений сильно упрощается: не нужно перебирать всевозможные уравнения, достаточно ограничиться только теми, которые имеют все требуемые симметрии. Так выявление симметрий помогает перейти от эксперимента к построению модели явления.

Ещё один пример, демонстрирующий важность понятия симметрий с экспериментальной точки зрения — это идентификация сохраняющихся величин. Такие параметры как масса, импульс или электрический заряд закрытых систем не изменяются с течением времени, поскольку имеют место соответствующие законы сохранения. Последние существуют потому, что законы физики обладают определенными симметриями. Например, если бы электромагнетизм не обладал так называемой  $U(1)$  симметрией, то и не было бы понятия электрического заряда. Обнаружение сохраняющейся величин указывает на наличие некоторой симметрии, что, в свою очередь, помогает построить физическую модель.

Понятие симметрии оказалось полезным также и с теоретической точки зрения. В качестве примера можно вспомнить историю создания специальной теории относительности. Выведенные Максвеллом уравнения электродинамики имели симметрию Лоренца, в то время как все остальные области физики обладали галилеевой инвариантностью. Можно сказать, что специальная теория относительности родилась из вопроса какая из этих двух симметрий является “настоящей” симметрией природы. Предложенная сначала как теоретическая модель, обобщающая симметрию Лоренца на механику, специальная теория относительности получила экспериментальное подтверждение. Это открытие в корне перевернуло взгляд физиков на природу пространства и времени.

Как другой пример, рассмотрим общую теорию относительности. Её математическая основа проста — физические законы не могут зависеть от выбора параметризации координат. Требование данной симметрии — свободы выбора координат, называемой диффеоморфизм-инвариантностью, — и привело к созданию общей теории относительности.

Применение аппарата теории симметрий позволило разрешить один из “кризисов” физики XX века, называемого “зоопарком частиц”. В то время на ускорителях обнаруживали все новые и новые фундаментальные частицы, в характеристиках которых, как казалось, не было никакой закономерности. Однако, используя теорию представлений групп, которая напрямую связана с понятием симметрий, все частицы удалось систематизировать. Более того, это стало одним из ключевых результатов, из которых, в последствии, появилась Стандартная Модель физики частиц.

В настоящее время в физике есть ряд открытых проблем, которые уже некоторое время пытаются решить привлекая симметричные соображения. Например, неизвестна причина (если она, конечно, есть) почему имеется ровно столько фундаментальных частиц, сколько их было обнаружено в экспериментах. Почему не больше и не меньше? В попытке ответа на этот вопрос родились суперсимметрия и теории Великого объединения. Были проведено множество различных экспериментальных проверок данных теорий, но пока не одна из них не подтвердилась.

Наконец, понятие симметрий оказалось полезно тем, что оно позволяет проклассифицировать всевозможные объекты по тому как они преобразуются под действием симметрии. Так, наличие симметрии Лоренца однозначно фиксирует возможные спины частиц — он может быть только целым или полуцелым числом. Соответственно, все частицы являются либо бозонами, либо фермионами, иного не может быть. При этом сами частицы могут быть сколь угодно сложными системами, как, например, протоны, состоящие из кварков. Но, как целый объект, протоны являются фермионами.

Как видно, понятие симметрий оказывается крайне полезным для развития физики. Теоретические модели, пытающиеся решить те или иные проблемы, мотивируют постановку экспериментов. Последние снабжают физиков новыми данными, позволяя строить новые модели. И на обоих концах понятие симметрии оказывается очень полезным.

## 1.2 Понятие симметрии и её связь с теорий групп

Дадим строгое определение понятия симметрии:

- <sub>1.1</sub> Пусть  $\mathcal{M} = \{\Phi, O\}$  — множество некоторых объектов и наблюдаемых величин соответственно. Преобразование  $F : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}} \equiv \{\tilde{\Phi}, \tilde{O}\}$  называется симметрией, если наблюдаемые остаются прежними:  $\tilde{O} = O$ .

Объекты и наблюдаемые могут иметь самую различную природу. Поясним смысл этих терминов и определения на паре примеров.

**Пример 1.1.** Рассмотрим систему, состоящую из четырёх неотличимых частиц: Поскольку частицы неразличимы, единственной наблюдаемой величиной является количество частиц. Это означает, что можно произвольным образом переставлять частицы —



Рис. 1: Четыре неотличимые частицы.

наблюдаемые от этого не меняются. Иначе говоря, произвольные перестановки четырех элементов являются симметрией данной системы.

Изложенный пример достаточно прямолинейно обобщается на случай правильных многоугольников. Наблюдаемой величиной в этом случае будет фигура как целое, а симметрия — множество всевозможных перестановок вершин и исходящих из них граней, оставляющих фигуру неизменной.

**Пример 1.2.** В качестве объектов и наблюдаемых можно брать более абстрактные величины, такие как преобразования координат и вид физических законов соответственно. Рассмотрим, например, некоторую частицу, считая, что её динамика подчиняется второму закону Ньютона,

$$F_i = m\ddot{x}_i . \quad (1.1)$$

Здесь и далее точка означает дифференцирование по времени, а нижний индекс обозначает одну из пространственных компонент. Объектами в этом случае являются координаты и сама частица, в то время как наблюдаемой величиной — траектория частицы. Поскольку траектория частицы однозначно определяется законом, по которому она движется, то можно считать, что наблюдаемая величина — это сам второй закон Ньютона. Тогда симметриями системы являются преобразование координат, оставляющих вид уравнения (1.1) неизменным. Такие преобразования известны как преобразования Галиллея,

$$\tilde{x}_i = x_i + v_i t , \quad \tilde{t} = t + c , \quad (1.2)$$

где  $v_i$  — это компоненты вектора скорости,  $t$  — время, а  $c$  — некоторая константа. В связи с этим говорят, что классическая механика имеет Галилеевскую симметрию.

Интересно сравнить преобразования Галилея с преобразованиями Лоренца. Последние являются симметрией специальной теории относительности и имеют вид

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - v_i t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad \tilde{t} = \frac{t - \frac{v_i x_i}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad (1.3)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование и  $v^2 = v_i v_i$ . Как показал эксперимент, именно они являются настоящими, полными симметриями механики. Как видно, в пределе  $v \ll c$  преобразования Галилея и Лоренца совпадают. Это означает, что Галилеева симметрия является приближенной симметрией природы, справедливой только в пределе  $v \ll c$ .

В зависимости от характера преобразуемых объектов, выделяют три категории симметрий: внутренние, пространственно–временные и смешанные. Внутренние симметрии не затрагивают преобразования координат. Например, перестановка четырёх неразличимых объектов — это внутренняя симметрия. При пространственно–временных симметриях преобразуются только координаты. Рассмотренные выше преобразования Галлилея и Лоренца принадлежат этому классу. Наконец, при смешанных симметриях преобразуются одновременно и координаты, и сами объекты. Та же симметрия Лоренца, рассматриваемая в контексте классической или квантовой теории поля, действует как на поля, так и на координаты, и потому является смешанной симметрией. Стоит отметить, что иногда смешанные симметрии не выделяют как отдельный класс симметрий.

**Пример 1.3.** Пусть  $V$  — некоторое комплексное, векторное, не более чем счётномерное пространство. Для удобства обозначим произвольный элемент  $V$  как

$$|\Psi\rangle \in V . \quad (1.4)$$

Пусть далее в  $V$  введено комплекснозначное скалярное произведение двух элементов  $\Psi$  и  $\Phi$  как умножение комплексного сопряжения  $\Psi$  на  $\Phi$ ,

$$\langle\Psi|\Phi\rangle \equiv \Psi^*\Phi . \quad (1.5)$$

В таком построении объектами являются функции, а в качестве наблюдаемых можно взять модуль всевозможных скалярных произведений. Симметрия подобной системы — это умножение элементов  $V$  на произвольное комплексное число единичной нормы,

$$|\tilde{\Psi}\rangle = e^{i\alpha} |\Psi\rangle , \quad \alpha \in \mathbb{R} . \quad (1.6)$$

Подобные преобразования называется  $U(1)$  симметрией и являются примером внутренних симметрий.

В квантовой механике пространство всевозможных состояний системы имеет такую же структуру, как и пространство  $V$ . При этом элементы  $V$  интерпретируются как возможные состояния системы, а квадрат модуля скалярного произведения  $|\Phi\rangle$  с  $\langle\Psi|$  задаёт вероятность обнаружить систему  $|\Phi\rangle$  в состоянии  $|\Psi\rangle$ . В силу данного сходства, квантовая механика также обладает  $U(1)$  симметрией.

Вернёмся к обсуждению роли симметрий в построении физических моделей. Для построения теории с заданными симметриями необходимо знать какие бывают симметрии вообще. Чтобы установить их полный список, необходимо найти подходящую математическую абстракцию, которая наиболее полно отображала бы алгебраические свойства симметрий. Если  $\mathcal{F}$  — множество всех симметрий некоторой системы, то выполняется следующее:

1. Тожественное преобразование является симметрией:  $\hat{1} \in \mathcal{F}$ .

2. Если  $f \in \mathcal{F}$ , то обратное преобразование также симметрия:  $f^{-1} \in \mathcal{F}$ .

3. Если  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ , то композиция преобразований также симметрия:  $(f_1 \cdot f_2) \in \mathcal{F}$ .

Наиболее близко данная структура охватывается понятиями группы и их представлений.

○<sub>1.2</sub> Множество  $G = \{g\}$  с введённой на нём операцией « $\cdot$ »:  $G \times G \rightarrow G$ , называемой групповым умножением, называется группой, если:

1. В  $G$  есть единичный элемент:  $\exists e \in G : \forall g \in G \hookrightarrow g \cdot e = g$ ;
2. Для любого элемента существует обратный:  $\forall g \in G \exists g^{-1} : g \cdot g^{-1} = e$ ;
3. Групповое умножение ассоциативно:  $\forall g_1, g_2, g_3 \in G \hookrightarrow (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ .

Иначе говоря, группа — это множество элементов с хорошо определенным, в указанном выше смысле, умножением.

**Пример 1.4.** Множество целых чисел с обычной операцией сложения образуют группу. Единичный элемент в этом случае — 0, а обратный к  $z \in \mathcal{Z}$  — это  $-z$ .

**Пример 1.5.** Множество действительных чисел без нуля образуют группу по умножению. Ноль необходимо исключить, поскольку для него не существует обратного элемента.

Когда рассматривались примеры симметрий, речь шла о преобразовании некоторых элементов множества. Чтобы прийти к аналогичной структуре необходимо ввести также понятие представления группы. Оно и будет играть роль преобразований на множестве.

○<sub>1.3</sub> Представлением  $T$  группы  $G$  в некотором векторном пространстве  $V$  называется такое отображение элементов группы в операторы, действующие на пространстве  $V$ , что:

1. Единичный элемент отображается в единичный оператор:  $T(e) = \hat{1}$ ;
2. Последовательное действие операторов согласовано с групповым умножением:  $\forall g_1, g_2 \in G \hookrightarrow T(g_1 \cdot g_2) = T(g_1)T(g_2)$ .

**Пример 1.6.** Группу Лоренца можно определить как множество матриц  $\Lambda$ , оставляющих неизменной метрику Минковского:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad \eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (1.7)$$

Как множество, они представляют собой набор элементов, образующих группу с матричным законом умножения. Формулы преобразования координат (1.3) являются представлением данных матриц в пространстве Минковского: каждой матрице  $\Lambda$  ставится в соответствие такая же матрица, действующая на пространстве Минковского:

$$T(\Lambda) = \Lambda, \quad \tilde{x} \equiv T(\Lambda)x = \Lambda x. \quad (1.8)$$

Это одно из возможных представлений группы Лоренца.

Таким образом, понятие группы отображает алгебраическую структуру множества симметрий, а понятие представления группы — преобразования симметрии. Можно сказать, что пространство  $\mathcal{M}$  из определения симметрии и есть пространство  $V$  в определении представления группы.

Можно провести следующую аналогию между понятиями группы и чисел. С точки зрения арифметики, числа являются математической абстракцией для обозначения объектов. Равенство  $1 + 3 = 4$  означает, что если к одному объекту добавить ещё три, то в результате получится четыре объекта. При этом объекты могут быть совершенно любыми — арбузами, монетами, или буквами. Понятие групп является такой же абстракцией, но над множеством всевозможных преобразований симметрии. А именно, понятие группы отображает алгебраическую структуру соответствующего множества, которая для разных объектов может быть одной и той же. Однако, явный вид симметрий, то есть, представление группы, для каждого типа объекта, вообще говоря, будут различными (но, тем не менее, с одинаковой алгебраической структурой).



## 2 Конечные группы

Начнём изучение теории групп со знакомства с конечными группами. Они широко применяются в физике и позволяют наиболее наглядно продемонстрировать смысл основных определений.

### 2.1 Примеры конечных групп

- <sub>2.1</sub> Число элементов в группе называется порядком группы. Группа называется конечной (дискретной), если число элементов конечно (не более, чем счётно).

Рассмотрим несколько примеров конечных групп, каждая из которых встречается в физике.

- <sub>2.2</sub> Группой  $Z_n$  называется множество целых чисел по модулю  $n$ , роль группового умножения выполняет сложение по модулю  $n$ .

Иначе говоря, все числа, отличающиеся на  $n$ , отождествлены:  $k \simeq k + n$ . Например  $Z_2$  — это группа второго порядка, состоящих из двух чисел, 0 и 1. Группа всех целых чисел по сложению,  $Z$  — это дискретная группа, поскольку содержит бесконечное количество элементов.

Рассмотрим подробнее группу  $Z_2$ . Групповое умножение (в данном случае это сложение по модулю) имеет вид

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 1 = 0. \quad (2.1)$$

Недостаток подобного определения в том, что оно привязано к понятию числа. Оказывается удобным абстрагироваться от этого, рассматривая 0 и 1 как некоторые элементы  $e$  и  $a$  соответственно. Тогда групповое умножение можно представить в виде таблицы:

$$Z_2 : \begin{array}{c|cc} & e & a \\ \hline e & e & a \\ \hline a & a & e \end{array} \quad (2.2)$$

Подобные таблицы называются таблицами Кэли:

- <sub>2.3</sub> Таблица Кэли — таблица, описывающая алгебраические структуры в некотором множестве (в данном случае групповое умножение в группе).

Для определенности, будем считать, что таблицы Кэли читаются слева-вверх: в  $i$ -ой строке  $j$ -го столбца стоит результат произведения  $i$ -го элемента в первом столбце на  $j$ -го элемента первой строчки (не наоборот).

В качестве примера, приведём также таблицу Кэли для группы  $Z_3$ :

$$Z_3 : \begin{array}{c|ccc} & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ a & a & b & e \\ b & b & e & a \end{array} \quad (2.3)$$

Задача 2.1. Показать, что в таблицах Кэли, описывающих групповое умножение, каждый элемент встречается ровно один раз в каждой строке и столбце.

Любая таблица Кэли, удовлетворяющая требованию в задаче, а также если представленной в ней умножение ассоциативно, соответствует некоторой группе. Подобные таблицы Кэли однозначно определяет группу, что позволяет думать о группе как о некотором абстрактном объекте с хорошо определенным законом умножения.

Каждая группа однозначно характеризуется групповым законом умножения. Поэтому если для двух групп он совпадает с точностью до переобозначений, не имеет смысла их различать:

- <sub>2.4</sub> Группы  $G_1$  и  $G_2$  изоморфны, если существует взаимнооднозначное отображение  $f : G_1 \leftrightarrow G_2$ , сохраняющее групповую структуру:

$$\forall g_1, g_2 \in G_1 \hookrightarrow f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \times f(g_2) . \quad (2.4)$$

Здесь « $\cdot$ » и « $\times$ » обозначают групповую операцию умножения в  $G_1$  и  $G_2$  соответственно.

Задача 2.2. Анализируя таблицы Кэли, найти всевозможные группы третьего и четвертого порядков.

Следующая группа, которую мы рассмотрим, это

- <sub>2.5</sub>  $S_n$  — группа перестановок  $n$  неразличимых объектов.

Заметим, что приведенное определение группы дано через её действие на объектах. Это действие является симметрией, и потому преобразования, как объекты, образуют группу. Подобные определения, задающие группу через множество симметрий некоторой системы, называются определяющими.

Из комбинаторики известно, что существует  $n!$  независимых расстановок  $n$  объектов. Поэтому порядок группы  $S_n$  —  $n!$ . Если условно пронумеровать объекты от 1 до  $n$ , произвольную перестановку можно записать в виде

$$(1 \rightarrow a_1, 2 \rightarrow a_2, \dots, n \rightarrow a_n) , \quad (2.5)$$

означающем, что пронумерованный как первый элемент перешёл на позицию  $a_1$ , второй — на позицию  $a_2$ , и так далее:

Для записи произвольных перестановок оказывается полезным понятие цикла:

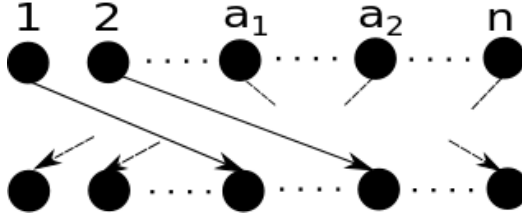


Рис. 2: Произвольная перестановка  $n$  элементов.

○<sub>2.6</sub> Циклом длины  $k$  называется перестановка вида

$$(a_1 \rightarrow a_2, a_2 \rightarrow a_3, \dots, a_k \rightarrow a_1) \equiv (a_1, a_2, \dots, a_k). \quad (2.6)$$

Иначе говоря, цикл — это перестановка  $k$  элементов между собой. По соглашению, цикл единичной длины указывает, что соответствующий элемент остался на своём месте.

Рассмотрим в качестве иллюстрации группу  $S_3$ . Существует всего шесть независимых перестановок, которые в виде циклов имеют вид

$$e = (1)(2)(3), a_1 = (1, 2, 3), a_2 = (3, 2, 1), a_3 = (1, 2)(3), a_4 = (1)(2, 3), a_5 = (3, 1)(2). \quad (2.7)$$

В записях перестановок единичные циклы, как правило, опускаются: считается, что все опущенные элементы остаются на своих местах. Мы будем придерживаться данного соглашения в дальнейшем.

Пользуясь определением  $S_3$  как группы перестановок неотличимых объектов, можно найти закон группового умножения. Для этого надо применить последовательно две перестановки и представить результат как действие одной перестановки.

**Пример 2.1.** Рассмотрим последовательное применение перестановок, соответствующих  $a_1$  и  $a_3$ . Если (условно) пронумеровать 3 объекта как 1, 2 и 3, то имеем:

$$1, 2, 3 \xrightarrow{a_1} 3, 1, 2 \xrightarrow{a_3} 1, 3, 2. \quad (2.8)$$

Как видно из этой цепочки,

$$a_3 \cdot a_1 = a_4. \quad (2.9)$$

Обратим внимание, что  $a_1$  в левой части уравнения стоит на втором месте — сначала применяется перестановка  $a_1$ , и только затем  $a_3$ .

Рассматривая таким образом всевозможные композиции перестановок, можно получить

таблицу Кэли для группы  $S_3$ :

$$\mathcal{S}_3 : \begin{array}{c|cccccc} & e & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \hline e & e & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \hline a_1 & a_1 & a_2 & e & a_4 & a_5 & a_3 \\ \hline a_2 & a_2 & e & a_1 & a_5 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & a_3 & a_5 & a_4 & e & a_2 & a_1 \\ \hline a_4 & a_4 & a_3 & a_5 & a_1 & e & a_2 \\ \hline a_5 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & e \end{array} \tag{2.10}$$

Данную таблицу умножения можно считать определением группы  $S_3$  без обращения к ней как к группе перестановок трёх объектов.

**Задача 2.3.** Рассмотрим группу  $S_n$ . Показать, что произвольную перестановку всегда можно представить в виде произведения циклов (понимаемых как их последовательное применение) с различными элементами. Например, перестановку  $(1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 1)$  из  $S_4$  можно представить как  $(1, 3)(2, 4)$ .

## 2.2 Основные определения

Среди всех групп можно выделить такие, для которых закон умножения относительно простой:

- <sub>2.7</sub> Группа  $G$  называется абелевой, если групповое умножение коммутативно:  $\forall g_1, g_2 \in G \hookrightarrow g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$ . В противном случае группа называется неабелевой.

**Пример 2.2.**  $S_3$  — это неабелева группа, поскольку, например,  $a_1 \cdot a_3 \neq a_3 \cdot a_1$ . Группы  $Z_2$  и  $Z_3$  абелевы.

Часто оказывается удобным рассматривать некоторые подмножества группы. На практике это помогает как лучше понять структуру группы, так и найти некоторые из её возможных представлений.

- <sub>2.8</sub> Множество элементов  $H = \{h \in G\}$  группы  $G$  образуют подгруппу, если  $H$  как множество образует группу относительно введенного в  $G$  группового умножения.

**Пример 2.3.** Как видно из таблиц Кэли для  $S_3$  и  $Z_3$ , элементы  $(e, a_1, a_2)$  из  $S_3$  образуют подгруппу, изоморфную  $Z_3$ .

Заметим, что любая группа содержит две так называемые тривиальные подгруппы. А именно,  $H = \{e\}$  и  $H = G$ .

В теории поля важную роль играют так называемые нелинейные представления, с которыми тесно связано понятие смежных классов. Конечные группы позволяют наглядно

продемонстрировать данное понятие. Также, с математической точки зрения, это и сопряженные понятия важны для классификация всевозможных представлений конечных групп.

○<sub>2.9</sub> Левым (правым) смежным классом некоторого элемента  $g \in G$  по подгруппе  $H$  называется множество элементов вида  $\{g \cdot h\}$  ( $\{h \cdot g\}$ ) для всех  $h \in H$ . Множество всех левых (правых) смежных классов обозначается как  $G/H$  ( $H \backslash G$ ).

В дальнейшем мы будем рассматривать только левые смежные классы, всё утверждения напрямую переносятся на случай правых смежных классов.

**Пример 2.4.** Левым смежным классом элемента  $a_3 \in S_3$  по подгруппе  $H = \{e, a_1, a_2\}$  является множество  $\{a_3, a_4, a_5\}$ .

*Утверждение 2.1* Левые смежные классы двух элементов  $g_1, g_2 \in G$  либо совпадают, либо не пересекаются.

▽ Пусть  $\tilde{g}_1$  и  $\tilde{g}_2$  — смежные классы элементов  $g_1$  и  $g_2$  соответственно. Если они не пересекаются, то утверждение доказано. Пусть пересечение  $\tilde{g}_1$  и  $\tilde{g}_2$  не пусто, тогда  $\exists h_1, h_2 : g_1 h_1 = g_2 h_2$ . Тогда в силу того, что  $H$  является подгруппой, имеем

$$g_1 h_1 = g_2 h_2 \Rightarrow g_1 = g_2 (h_2 h_1^{-1}) = g_2 h_0, \quad h_0 \in H. \quad (2.11)$$

Таким образом, если  $\tilde{g}_1$  и  $\tilde{g}_2$  пересекаются, то  $g_1$  принадлежит смежному классу  $g_2$ . Тогда

$$\forall h \in H \exists h_a = h_0 h \in H : g_1 h = g_2 h_a. \quad (2.12)$$

В силу произвольности  $h$ , данное равенство доказывает, что левые смежные классы элементов  $g_1$  и  $g_2$  совпадают.

△

*Следствие.* Группа  $G$  изоморфна объединению всех её левых смежных классов по некоторой подгруппе,  $G = \cup G/H$ .

Задача 2.4. Описать левый смежный класс  $S_3/Z_3$ .

○<sub>2.10</sub> Подгруппа  $H$  называется инвариантной подгруппой, если  $\forall g \in G \hookrightarrow ghg^{-1} \in H$ .

Задача 2.5. Убедиться, что  $Z_3$  является инвариантной подгруппой в  $S_3$ .

В случае, когда  $H$  является инвариантной подгруппой, на множестве всех левых смежных классов оказывается возможным ввести хорошо определенный закон умножения. А именно, будем рассматривать левые смежные классы, каждый по отдельности, как некоторый элемент. Представителем левого смежного класса  $\tilde{g} \in G/H$  будем называть произвольный  $g \in G$ , который также лежит в  $\tilde{g}$ . Пусть далее  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in G/H$ ,  $g_1, g_2$  являются

представителями классов  $\tilde{g}_1$  и  $\tilde{g}_2$  соответственно, и  $g_1 \cdot g_2 = g_3$  — представитель  $\tilde{g}_3 \in G/H$ . Тогда произведением  $\tilde{g}_1$  и  $\tilde{g}_2$  будем называть  $\tilde{g}_3$ :

$$\tilde{g}_1 \cdot \tilde{g}_2 = \tilde{g}_3 . \quad (2.13)$$

Чтобы данное определение не было противоречивым, необходимо, чтобы произведение двух смежных классов не зависело от выбора их представителей. Покажем, что это действительно так. Обозначим через  $gH$  произведение  $g$  на некоторый элемент из  $H$ . Это позволяет записать произвольных представителей  $\tilde{g}_1$  и  $\tilde{g}_2$  в виде  $g_1H$  и  $g_2H$  соответственно. Тогда имеем:

$$(g_1H)(g_2H) = g_1(Hg_2)H = g_1g_2(HH) = (g_1g_2)H = g_3H = \tilde{g}_3 , \quad (2.14)$$

где были использованы ассоциативность группового умножения и тот факт, что  $H$  является инвариантной подгруппой. Приведенная цепочка равенств доказывает утверждение.

Заметим, что: 1) единичным элементом при таком умножении является левый класс смежности  $e \in G$ ; 2) пусть  $g \in \tilde{g}$ , тогда обратным элементом к  $\tilde{g}$  является класс смежности, представителем которого является  $g^{-1}$ ; 3) закон умножения ассоциативен в силу ассоциативности умножения в  $G$ . Комбинируя все результаты, мы доказали следующее:

*Утверждение 2.2* Пусть  $H$  — инвариантная подгруппа в  $G$ . Тогда  $G/H$ , рассматриваемое как множество всех левых смежных классов, и умножением, заданным формулой (2.13), является группой, и называется факторгруппой.

*Задача 2.6.* Показать, что  $S_3/Z_3$  является группой, изоморфной  $Z_2$ .

Кроме “деления” группы на подгруппу, формализованного в виде определения левого смежного класса  $G/H$ , можно ввести понятие “произведения” групп:

○<sub>2.11</sub> Тензорным (прямым) произведением групп  $G_1$  и  $G_2$ , обозначаемым как  $G = G_1 \otimes G_2$ , называется множество упорядоченных пар вида  $(g_1, g_2)$ , где  $g_1 \in G_1$ ,  $g_2 \in G_2$ , с операцией группового умножения определенного согласно формуле

$$\forall g_{11}, g_{12} \in G_1, \quad g_{21}, g_{22} \in G_2, \quad (g_{11}, g_{21}) \cdot (g_{12}, g_{22}) = (g_{11} \cdot g_{12}, g_{21} \cdot g_{22}) . \quad (2.15)$$

Достаточно легко показать, что тензорное произведение двух групп является группой. При этом выполняются следующие свойства, которые мы сформулируем в виде задачи:

*Задача 2.7.* Пусть  $G$  — тензорное произведение групп  $G_1$  и  $G_2$ . Выделить в  $G$  подгруппы, изоморфные  $G_1$  и  $G_2$ . Показать, что они являются инвариантными подгруппами в  $G$ , а также что  $G/G_1$  изоморфно  $G_2$ .

В общем случае, однако, операция тензорного умножения групп не является обратной к построению левого смежного класса по некоторой инвариантной подгруппе:  $(G/H) \otimes H \neq G$ .

Задача 2.8. Выделить в  $Z_4$  подгруппу, изоморфную  $Z_2$ , и показать, что она является инвариантной подгруппой. Показать, что  $Z_4/Z_2 = Z_2$ , но  $Z_4 \neq Z_2 \otimes Z_2$ .

При рассмотрении некоторой группы  $G$  возникает вопрос, можно ли свести алгебраическую структуру  $G$  к более простым. Для этого оказывается удобным понятие простых и полупростых групп.

○<sub>2.12</sub> Группа называется простой, если она не имеет нетривиальных инвариантных подгрупп. Группа называется полупростой, если она не содержит абелевых инвариантных подгрупп.

Если группа  $G$  не является простой, то есть содержит инвариантную подгруппу  $H$ , то в некоторых аспектах изучение её алгебраических свойств сводится к изучению таковых  $H$  и  $G/H$ . Это позволяет изучать структуру произвольной группы посредством выделения в ней простых подгрупп (и соответствующих левых классов смежности). Заметим, что все простые группы известны и проклассифицированы.

Для установления количества различных представлений конечных групп важно понятие классов сопряженных элементов:

○<sub>2.13</sub> Элемент  $g_1 \in G$  сопряжен с элементом  $g_2 \in G$ , если  $\exists g \in G : g_1 = g \cdot g_2 \cdot g^{-1}$ . Классом сопряженности (или классом сопряженных элементов) элемента  $g_0 \in G$  называется множество элементов вида  $\{g \cdot g_0 \cdot g^{-1}\}$  для всех  $g \in G$ .

Также, как и в случае с левыми смежными классами, можно показать, что группа  $G$  распадается на непересекающиеся классы сопряженных элементов. Однако, в отличие от  $G/H$ , когда  $H$  является инвариантной подгруппой, подобное множество не обладает групповой структурой.

Задача 2.9. Найти классы сопряженных элементов  $S_3$ . Показать, что на данном множестве групповое умножение, определенное по аналогии с формулой (2.13), плохо определено.

Наконец, на практике также оказывается полезными следующие понятия:

○<sub>2.14</sub> Элемент  $g_0$  называется самосопряженным, если  $\forall g \in G \Leftrightarrow g \cdot g_0 \cdot g^{-1} = g_0$ . Множество всех подобных  $g_0$  называется центром группы.

Задача 2.10. Показать, что центр группы образует абелеву инвариантную подгруппу.

## 2.3 Представления конечных групп

Представление группы — это её действие в некотором пространстве. Каждая группа имеет конечное количество таких возможных действий. Одним из них всегда является так называемое тривиальное представление:

○<sub>2.15</sub> Тривиальным представлением группы  $G$  в некотором векторном пространстве  $V$  называется представление, сопоставляющее каждому элементу группы единичный оператор:  $\forall g \in G \quad T(g) = \hat{1}$ .

Конечно, этим не исчерпываются всевозможные представления групп. Например, как будет показано далее, любое представление  $Z_2$  сводится к комбинации следующих двух одномерных представлений:

- Тривиальное одномерное представление:  $T(e) = T(a) = \hat{1}$ .
- $T(e) = \hat{1}, \quad T(a) = -\hat{1}$ .

**Пример 2.5.** Определение группы  $S_n$  было дано через её действие на  $n$  неразличимых объектов. Подобное определение удобно тем, что заранее известно, что перестановки являются симметриями, а потому  $S_n$  является группой. С математической точки зрения группа  $S_n$  определяется её таблицей Кэли.

Если задано действие группы в некотором пространстве  $V$ , то оказывается возможным проклассифицировать все объекты из  $V$  в соответствии с тем, как они преобразуются под действием группы. Рассмотрим в качестве примера группу  $Z_2$  и пространство функций одной переменной. Пусть  $\psi_1(x)$  — некоторая произвольная функция. Определим тогда действие  $Z_2$  на функции следующим образом:

$$T(e)\psi_1(x) = \psi_1(x), \quad T(a)\psi_1(x) = \psi_1(-x) \equiv \psi_2(x). \quad (2.16)$$

Таким образом,  $T(a)$  инвертирует координату. Это является симметрией, поскольку отображает множество всех функций в само себя (дополнительных наблюдаемых нет). Для фиксированной функции  $\psi_1(x)$ , действие группы  $Z_2$  оставляет её в пространстве функций с базисом  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$ . Это позволяет записать представление  $Z_2$  в данном пространстве через матрицы:

$$T(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Действие матриц максимально просто тогда, когда каждая из них диагональна. Поэтому имеет смысл попробовать привести выписанные матрицы к диагональному виду. В данном случае этого легко добиться. В базисе из собственных векторов обеих матриц,  $\psi_+(x) \equiv \psi_1(x) + \psi_2(x)$ ,  $\psi_-(x) \equiv \psi_1(x) - \psi_2(x)$ , матрицы представления  $Z_2$  принимают вид

$$T(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

и действуют на базисные вектора как

$$T(e)\psi_{\pm}(x) = +\psi_{\pm}(x), \quad T(a)\psi_+(x) = +\psi_+(x), \quad T(a)\psi_-(x) = -\psi_-(x). \quad (2.19)$$



В силу произвольности выбора функции  $\psi_1(x)$ , действие  $Z_2$  на всем пространстве функций распадается на два независимых: на действие на чётные и нечётные функции соответственно. При этом выполняются два важных свойства: 1) данные подпространства не пересекаются, и 2) на каждом из них  $Z_2$  действует одним из своих представлений. С точки зрения классификации функций это означает, что существуют только чётные и нечетные функции, и при этом произвольную функцию можно всегда представить в виде суммы последних.

Приведенный пример демонстрирует общий случай понятий неприводимых представлений. А именно:

○<sub>2.16</sub> Пусть на пространстве  $V$  действуют некоторые операторы  $\hat{T}_i$ , отображающее  $V$  в себя. Тогда подпространство  $M \subset V$  называется инвариантным подпространством, если

$$\forall T_i, m \in M \leftrightarrow \hat{T}_i m \in M. \quad (2.20)$$

Иначе говоря, все вектора из инвариантного пространства остаются в нём же при действии всех операторов  $\hat{T}_i$ .

○<sub>2.17</sub> Представление группы  $G$  в векторном пространстве  $V$  называется приводимым, если в  $V$  существуют инвариантные подпространства, отличные от самого  $V$ . В противном случае представление называется неприводимым.

В рассмотренном выше случае пространства функций, инвариантные подпространства — это пространства чётных и нечётных функций. При этом на каждом подпространстве  $Z_2$  действовала по одному из своих неприводимых представлений (у  $Z_2$  их всего два).

В общем случае, из произвольного представления некоторой группы можно всегда выделить неприводимые представления. Поэтому вопрос нахождения всевозможных представлений группы сводится к вопросу установления всех неприводимых представлений данной группы. С физической точки зрения данный вопрос наиболее важен в том плане, что это позволяет проклассифицировать всевозможные объекты по тому, как они преобразуются под действием неприводимых представлений. В силу важности этого утверждения, сформулируем его ещё раз отдельно:

*Пусть (некоторое представление)  $G$  в пространстве  $V$  является симметрией. Тогда все объекты в  $V$  можно проклассифицировать по тому, как они преобразуются под действием группы  $G$ .*

В дальнейшем мы увидим насколько важно данное утверждение в контексте квантовой механики и теории поля.

Для выделения неприводимых представлений оказывается полезным ввести понятие проектора:

○<sub>2.18</sub> Проектом  $P$  называется оператор, выделяющий некоторое подпространство из всего пространства.

Поскольку проектор выделяет некоторое подпространство, применение его дважды должно давать тот же результат:

$$P^2 = P . \quad (2.21)$$

Введение понятие проектора позволяет переформулировать определение неприводимого представления следующим образом:

○<sub>2.19</sub> Представление называется приводимым, если существует такой проектор  $P$ , отличный от единичной матрицы, что

$$\forall g \in G \leftrightarrow PT(g)P = T(g)P . \quad (2.22)$$

Выписанное требование означает существование инвариантных подпространств: представление группы оставляет все вектора из подпространства, выделяемого проектором  $P$ , в нём же.

**Пример 2.6.** В рассмотренном примере действия  $Z_2$  на пространстве функций проектором, выделяющим инвариантное подпространство, был

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.23)$$

Как легко понять, он выделяет компоненту  $\psi_+(x)$  произвольной функции. Дополнение данного проектора до единичной матрицы также является проектором (на компоненту  $\psi_-(x)$ ) и также выделяет инвариантное подпространство.

Мы видели, что действие  $Z_2$  на пространстве функций диагонализуемо. Подобные представления называются полностью приводимыми:

○<sub>2.20</sub> Представление называется полностью приводимым, если существует базис, в котором  $\forall g \in G T(g)$  имеет блочно-диагональный вид:

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 & \dots & \dots \\ 0 & T_2(g) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & T_n(g) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

При этом, конечно, каждое из  $T_i$  не обязано быть одномерным. Все  $T_i$  действует на своём подпространстве  $V_i \subset V$  и выделяет из  $V$  объекты, преобразующиеся именно по данному представлению группы.

**Пример 2.7.** Группа Лоренца является фундаментальной симметрией природы и, следовательно, все частицы можно проклассифицировать по тому как они преобразуются под действием группы Лоренца. Все её неприводимые представления можно разбить на две категории: 1) бозоны, частицы с целых спином, и 2) фермионы, частицы с полуцелым спином. Так, например, электрон и мюон являются фермионами, а фотон — бозоном.

**Пример 2.8.** *Приводимое, но не полностью приводимое представление.* Рассмотрим группу целых чисел с групповой операцией сложения. Пусть  $z$  — произвольное целое число. Можно легко проверить,

$$T(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

является некоторым двухмерным представлением данной группы. Это представление приводимо, поскольку проектор

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

выделяет инвариантное подпространство. Если бы представление было полностью приводимо, то дополнение выделяемого  $P$  подпространства до полного также было бы инвариантным пространством (в противном случае  $T(z)$  заведомо неприводимо к блочно-диагональному виду). Иначе говоря, для  $1 - P$  также должно было бы выполняться (2.22). Однако, легко убедиться, это не так. Поэтому представление (2.25) невозможно привести к более удобному и компактному виде, чем изначальное.

Приведём несколько примеров применения представлений  $Z_2$  в физике, а именно, в квантовой механике и теории поля (в том числе квантовой). Объектами в этом случае являются функции трёх пространственных координат и одной временной, а наблюдаемыми — соответствующие физические величины в рамках рассматриваемой области физики.

**Пример 2.9.** *P-чётность (отражение координат).* Действие  $Z_2$  можно ввести как операцию отражения нечётного числа пространственных координат. Повторяя рассуждения из начала параграфа можно показать, что все функции при этом разбиваются на чётные и нечётные. Говорят, что чётные функции, на которые  $Z_2$  действуют тривиальным представлением, имеют положительную чётность. Нечётные функции имеют отрицательную чётность — на них  $Z_2$  действует своим вторым неприводимым представлением, меняющим знак у функции.

**Пример 2.10.** *T-чётность (отражение времени).* Можно отражать не координаты, а время. Также, как и в случае P-чётности, выделяют чётные и нечётные функции.

**Пример 2.11.** *PT-симметрия.* Для некоторых систем P и T преобразования по отдельности могут не являться симметриями, в то время как их одновременное применения является симметрией. Подобное одновременное отражение координат и времени называется PT-симметрией.

**Пример 2.12.** *C-чётность.* Группа  $Z_2$  может выступать также в роли внутренней симметрии. Так, в рамках квантовой теории поля у каждой частицы есть античастица (возможно, совпадающая с самой частицей). Действие  $Z_2$  можно ввести как замену частицы на античастицу. Тогда если  $|\psi\rangle$  — это частица, то  $\mathcal{C}|\psi\rangle \equiv |\tilde{\psi}\rangle$  является античастицей. В частности, для собственных состояний

$$\mathcal{C}|\psi\rangle = \eta|\psi\rangle . \quad (2.27)$$

Поскольку применение C-сопряжения дважды должно давать изначальную частицу, то

$$\eta = \pm 1 . \quad (2.28)$$

Экспериментально установлено, что электромагнитное, сильное и гравитационное взаимодействия C-инвариантны, а слабое ее нарушает. Это ведёт к нетривиальным физическим следствиям, которые будут рассмотрены в конце следующего параграфа.

**Пример 2.13.** *CPT-симметрия.* В квантовой теории поля ни одно из C, P или T преобразований или их попарной комбинации не является симметрией. Только их совместное применение, называемое CPT-симметрией, является настоящей симметрией природы.

Вернёмся к обсуждению представлений в общем случае. Фундаментальную роль в классификации всех неприводимых представлений конечных групп играет понятие регулярного представления:

○<sub>2.21</sub> Пусть  $G$  — некоторая конечная группа. Определим  $V$  как векторное пространство, базисными векторами которого являются элементы  $G$ , и будем обозначать их как  $|g\rangle$ . Регулярным представлением  $G$  называется представление  $G$  в  $V$ , действующее согласно уравнению

$$T(g_1)|g_2\rangle = |g_1 \cdot g_2\rangle . \quad (2.29)$$

Задача 2.11. Показать, что регулярное представление действительно является представлением.

**Пример 2.14.** Построим регулярное представление  $Z_3$ . Порядок группы  $Z_3$  равен трём, поэтому пространством регулярного представления  $Z_3$  является трехмерное векторное пространство с базисными векторами  $|e\rangle$ ,  $|a_1\rangle$ ,  $|a_2\rangle$ . Представим базисные вектора в виде

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |a_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (2.30)$$

Построим, например,  $T(a_1)$ . В соответствии с определением, это должен быть такой оператор, что

$$T(a_1)|e\rangle = |a_1\rangle , \quad T(a_1)|a_1\rangle = |a_2\rangle , \quad T(a_1)|a_2\rangle = |e\rangle . \quad (2.31)$$

Это позволяет представить  $T(a_1)$  в виде матрицы:

$$T(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Аналогичное рассмотрение для  $T(e)$  и  $T(a_2)$  даёт:

$$T(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

При изучении конкретных представлений групп удобно понятие матричных элементов:

- <sub>2.22</sub> Пусть задано некоторое представление группы  $G$  в векторном пространстве  $V$  с базисными векторами  $|e_i\rangle$ . Тогда матричным элементом  $T(g)$  называется скалярное произведение

$$T_{ij}(g) = \langle e_j | T(g) | e_i \rangle. \quad (2.34)$$

**Пример 2.15.** Для регулярного представления  $ij$ -ый элемент матрицы  $T(g)$  является матричным элементом  $T_{ij}(g)$ . Например,  $T_{23}(a_1) = \langle a_2 | T(a_1) | a_1 \rangle = 1$ .

Как видно из формулы (2.34), матричные элементы имеют смысл разложения преобразованного базисного вектора по базису. Поэтому знание матричных элементов равносильно знанию явного вида представления группы в виде матриц.

В физике важную роль играют так называемые унитарные представления:

- <sub>2.23</sub> Представление называется унитарным, если  $\forall g \in G \hookrightarrow T^\dagger(g)T(g) = 1$ , где крест означает операцию эрмитова сопряжения.

Унитарность представления гарантирует, что всевозможные скалярные произведения остаются неизменными. С этой точки зрения физически осмысленными являются только унитарные представления внутренних симметрий.

Приведём без доказательства следующее утверждение, играющее фундаментальную роль в теории представлений конечных групп:

*Утверждение 2.3* Любое представление конечной группы эквивалентно унитарному и полностью приводимо. Также все неприводимые представления группы содержатся в её регулярном представлении, а количество различных неприводимых представлений группы равно количеству классов сопряжённых элементов.

Важно отметить, что при этом рассматриваются, вообще говоря, комплекснозначные представления над комплексным пространством. Поясним важность данного утверждения через задачу:

*Задача 2.12.* Выделить все неприводимые представления группы  $Z_3$  из регулярного представления, считая, что пространство представления *a)* действительное, *б)* комплексное.

Таким образом задача классификации всевозможных представлений конечных групп решена. Из последнего утверждения также следует, что  $Z_2$  имеет всего два неприводимых представления, введённых ранее.

## 2.4 Явное построение симметрий

Рассмотрим два примера, демонстрирующие как можно находить и использовать симметрии различных систем.

В качестве первого примера, рассмотрим три одинаковых тела, лежащих на гладкой поверхности в вершинах правильного треугольника, соединённых между собой одинаковыми пружинами. Введём координаты и пронумируем тела так, как указано на рисунке 3 (окружность единичного радиуса). Теории групп и их представлений оказывается доста-

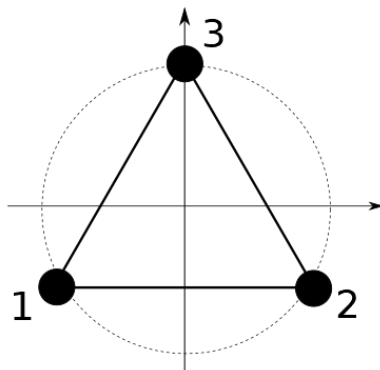


Рис. 3: Три одинаковых тела на гладкой поверхности.

точно, чтобы выделить всевозможные независимые движения такой системы. Покажем, как это сделать.

Наблюдаемыми величинами являются положения каждого из тел, то есть шесть чисел

$$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3). \quad (2.35)$$

Симметриями является все преобразования системы, которые оставляют эту шестерку чисел неизменными. Поскольку тела неразличимы, то понятно, что искомая симметрия является неким представлением группы  $S_3$ . При этом размерность этого представления должна совпадать с количеством наблюдаемых. Таким образом, нам необходимо построить шестимерное представление  $S_3$ , которое являлось бы симметрией описанной системы.

Для построения искомого представления заметим, что оно должно, во-первых, менять местами тела и, во-вторых, менять соответствующим образом координаты тел. Поэтому задачу построения представления сводится к задаче построения этих двух представлений.

Построим сначала представление, действующее на координаты каждого из тел. Для этого определим представление  $T_2$  группы  $S_3$  как соответствующие перестановки трех тел на плоскости.  $T_2(a_1)$  и  $T_2(a_2)$  описывают циклические перестановки трех тел, и потому сводятся к повороту координат на углы  $\pm \frac{2\pi}{3}$ .  $T_2(a_3)$ ,  $T_2(a_4)$  и  $T_2(a_5)$  меняет местами пару тел, что геометрически сводится к отражению горизонтальной оси координат и, для  $T_2(a_4)$  и  $T_2(a_5)$ , повороту системы координат на углы  $\pm \frac{2\pi}{3}$ . Итого, представление  $T_2$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} T_2(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_2(a_1) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, & T_2(a_2) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \\ T_2(a_3) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_2(a_4) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, & T_2(a_5) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Можно убедиться, что данное представление неприводимо, и потому является одним из важных представлений группы  $S_3$ . Стоит отметить, что если бы система координат была введена иначе или была использована иная нумерация тел, это привело к другим, но эквивалентным, выражениям для матрицы  $T_2$ .

Остаётся построить трехмерное представление  $T_3$  группы  $S_3$ , переставляющее между собой вершины как объекты. Его легко построить, введя базис

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

и потребовав, чтобы  $T_3(a_i)$  осуществляла перестановку  $a_i$ . Результат имеет вид

$$\begin{aligned} T_3(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_3(a_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & T_3(a_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_3(a_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_3(a_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & T_3(a_5) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Требуемое нам шестимерное представление  $S_3$  является тензорным произведением построенных представлений  $T_2$  и  $T_3$ .

○<sub>2.24</sub> Пусть  $T_1$ ,  $T_2$  представления группы  $G$  в пространствах  $V_1$  и  $V_2$  соответственно.

Тогда тензорным произведением представлений  $T_1$  и  $T_2$  называется представление

$T \equiv T_1 \otimes T_2$ , действующее в  $V = V_1 \otimes V_2$  согласно правилу

$$\forall g \in G, |i\rangle \in V_1, |a\rangle \in V_2: T(g) |i, a\rangle = T_1 |i\rangle \otimes T_2 |a\rangle \equiv |\tilde{i}, \tilde{a}\rangle, \quad (2.38)$$

где  $|i, a\rangle$  — произвольный элемент из  $V$ .

Для рассматриваемого случая пространства  $V_1$  и  $V_2$  являются пространствами координат и тел как объектов соответственно. Искомое шестимерное представление — это  $T_6 = T_2 \otimes T_3$ . Например,  $T_6(a_4)$  имеет вид

$$T_6(a_4) = \begin{pmatrix} T_2(a_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_2(a_4) \\ 0 & T_2(a_4) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Как можно убедиться явным вычислением, любой подобный элемент оставляет шестерку наблюдаемых (2.35) неизменной. Таким образом, построенное представление  $S_3$  действительно является симметрией.

Задача 2.13. Пусть  $T_1(g)_{ij}$ ,  $T_2(g)_{ab}$  — матричные элементы представлений  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. Найти матричные элементы тензорного произведения представлений  $T_1$  и  $T_2$ .

Для нахождения всевозможных мод движения системы необходимо разложить найденное представление на неприводимые компоненты. Пошаговое выделение всех неприводимых представлений увело бы нас слишком глубоко в математические аспекты теории групп. Поэтому здесь мы приведём только вид базиса, в котором представление имеет блочно-диагональный вид. Это будет достаточно того, чтобы “увидеть” соответствующую моду.

1)

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0):$$

(горизонтальное движение системы как целого)

2)

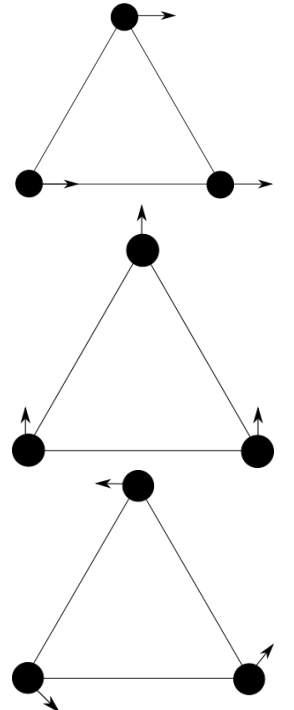
$$(0, 1, 0, 1, 0, 1):$$

(вертикальное движение системы как целого)

3)

$$(\sqrt{3}, -3, -\sqrt{3}, 3, -2\sqrt{3}, 0):$$

(вращение системы как целого)

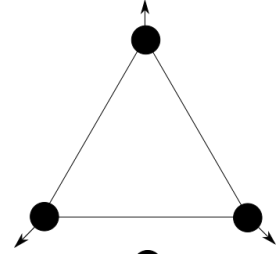




4)

$$(-3, -\sqrt{3}, 3, -\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}):$$

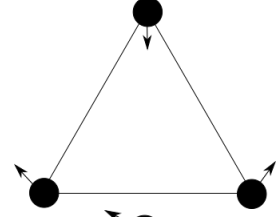
(равномерное сжатие или растяжение)



5)

$$(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}, 1, 0, -2):$$

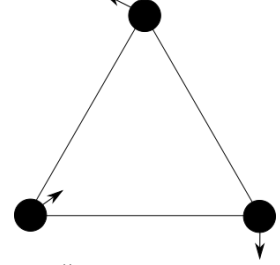
(асимметричное сжатие или растяжение)



6)

$$(\sqrt{3}, 1, 0, -2, -\sqrt{3}, 1):$$

(поворот предыдущего движения на  $\frac{2\pi}{3}$ )



Таким образом, зная только то, что система обладает  $S_3$  симметрией, мы нашли всевозможные моды её движений.

Поясним полученный результат. В изначальном базисе всевозможные движения состоят из изменений каждой из шести координат по отдельности. Выделение неприводимых представлений  $S_3$  позволило перейти к новому базису, который является более наглядным и удобным.

В качестве второго примера, вернемся к рассмотрению  $C$ -чётности. Как говорилось ранее,  $C$ -преобразование заменяет частицу на античастицу. При этом любое собственное состояние имеет чётность  $\eta = \pm 1$ . Рассмотрим систему, состоящую из нескольких частиц,  $|\psi_1, \dots, \psi_n\rangle$ , где  $\psi_i$  описывают одну из частиц и является собственным состоянием  $C$ -преобразования. Действие  $C$ -чётности на данную систему является тензорным произведением представлений на каждой из частиц в отдельности, то есть, сводится к  $C$ -сопряжению каждой из частиц. Таким образом,

$$\mathcal{C} |\psi_1, \dots, \psi_n\rangle = \eta_1 \dots \eta_n |\psi_1, \dots, \psi_n\rangle, \quad (2.40)$$

где  $\eta_i$  — собственные числа соответствующих частиц. Как видно,  $C$ -чётность системы частиц является произведением  $C$ -чётностей её составляющих. В связи с этим говорят, что  $C$ -чётность является мультипликативной характеристикой системы.

Для демонстрации применения  $C$ -чётности рассмотрим фотон,  $|\gamma\rangle$ . Поскольку он не имеет заряда, фотон является собственной античастицей. Соответственно, должно выполняться

$$\mathcal{C} |\gamma\rangle = \eta |\gamma\rangle, \quad \eta = \pm 1. \quad (2.41)$$

В рамках квантовой теории поля можно дать строгое обоснование того факта, что для фотона  $\eta = -1$ . На классическом уровне этому можно дать только следующее качественное объяснение. Рассмотрим электрон во внешнем электрическом поле, и сделаем  $C$ -преобразование надо всей системой. Поскольку электромагнитное взаимодействие  $C$ -инвариантно, динамика системы не должна измениться. Однако, при  $C$ -сопряжении электрон переходит в позитрон, меняя знак электрического заряда. Чтобы динамика не изменилась, электрическое поле также должно изменить свой знак. Последнее возможно только в том случае, если фотон, являющийся квантом электромагнитного поля, имеет  $\eta = -1$ .

Изложенные соображения приводят к так называемой теореме Фари: при электромагнитном взаимодействии не изменяется (количественная) четность фотонов. Это следует из того факта, что для четного числа фотонов  $C$ -четность равна единице, а для нечетного — минус единице. Поскольку электромагнитное взаимодействие  $C$ -инвариантно, то переходы с различными значениями  $C$ -четности запрещены.

## 2.5 Таблицы Юнга и представления $S_n$

Неприводимые представления группы  $S_n$  играют важную роль в физике, особенно в контексте выделения неприводимых представлений различных групп Ли. Рассмотрим вопрос как их можно построить в общем случае.

Как известно, произвольную перестановку  $n$  объектов,  $S$ , можно представить в виде произведения некоторого количества циклов:

$$S = (a_1 a_2 \dots a_{i_1}) (a_{i_1+1} a_{i_1+2} \dots a_{i_1+i_2}) \dots (a_{i_1+\dots+i_{k-1}+1} a_{i_1+\dots+i_{k-1}+1} \dots a_{i_1+\dots+i_{k-1}+i_k}) . \quad (2.42)$$

При этом каждый элемент  $a_i$  входит в выражение ровно один раз, и  $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n$ . Поскольку различные циклы не имеют общих элементов, перестановка циклов местами не изменяет общий результат перестановки. Поэтому для однозначного представления перестановки удобно зафиксировать правило, что в разбиение перестановки на циклы различные циклы идут в порядке убывания их длин, то есть

$$i_1 \geq i_2 \geq i_3 \dots \geq i_k . \quad (2.43)$$

○<sub>2.25</sub> Неубывающая последовательность положительных чисел,  $(i_1, i_2, \dots, i_l)$ , сумма которых равна  $n$ , называется разбиением числа  $n$ .

Как видно, произвольной перестановке из  $S_n$  соответствует некоторое разбиение числа  $n$ . Данное разбиение однозначно описывает циклическую структуру соответствующей перестановки, задавая длины каждой из перестановок. При этом, конечно, различным перестановкам могут соответствовать одинаковые разбиение числа  $n$ .

*Утверждение 2.4* Перестановки, соответствующие одинаковому разбиению числа  $n$ , принадлежат одному классу сопряженных элементов.

▽ Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — две перестановки, соответствующие одинаковому разбиению числа  $n$ , каждый из которых состоит из  $n$  циклов. Рассмотрим первый цикл, входящий в каждую из перестановок:

$$A_1 = (a_1 a_2 \dots a_m) \in S_1, \quad B_1 = (b_1 b_2 \dots b_m) \in S_2. \quad (2.44)$$

Введем перестановку  $T_1$ , заменяющую элементы  $a_i$  на  $b_i$ :

$$T_1 = (a_1 \rightarrow b_1, a_2 \rightarrow b_2, \dots, a_m \rightarrow b_m). \quad (2.45)$$

Тогда, как легко убедиться,

$$T_1 \cdot A_1 \cdot T_1^{-1} = B_1. \quad (2.46)$$

Аналогично, для любых циклов  $A_i \in S_1$  и  $B_i \in S_2$  можно построить перестановку  $T_i$ , связывающую их уравнением вида (2.46). Тогда для перестановок  $S_1$  и  $S_2$  имеем

$$(T_1 \dots T_n) \cdot S_1 \cdot (T_1 \dots T_n)^{-1} = S_2, \quad (2.47)$$

откуда следует, что  $S_1$  и  $S_2$  принадлежат одному смежному классу.

△

*Следствие 1.* Произвольному разбиению числа  $n$  можно однозначно сопоставить класс смежных элементов из  $S_n$  с таким же разбиением на циклы. В силу этого количество смежных классов  $S_n$  равно количеству различных разбиений числа  $n$ .

*Следствие 2.* Количество различных неприводимых представлений группы  $S_n$  равно количеству различных разбиений числа  $n$ .

Используя комбинаторику, можно посчитать количество элементов в каждом из смежных классов. Пусть рассматриваемый смежный класс соответствует некоторому разбиению числа  $n$ ,  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ , и циклы длины  $j$  входят в него  $k_j$  раз. Всего имеется  $n!$  вариантов расстановок  $n$  элементов на  $n$  позиций в циклах. Однако, неважен порядок перечисления циклов одинаковой длины. Также неважен циклический порядок перечисления элементов внутри одного цикла. Поэтому количество различных элементов внутри рассматриваемого смежного класса равно

$$N = \frac{n!}{\prod_j j^{k_j} k_j!}. \quad (2.48)$$

Оказывается удобным представлять графически классы сопряженных элементов  $S_n$  с помощью таблицы Юнга.

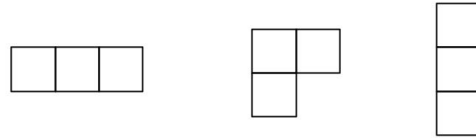
○<sub>2.26</sub> Таблицей Юнга для разбиения числа  $n$ ,  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ , называется таблица, состоящая из  $k$  строк, так что  $j$ -ая строка имеет длину  $i_j$ .

**Пример 2.16.** *Таблицы Юнга для  $S_3$ .* Существует всего 3 разбиения числа 3, это

$$(1, 1, 1), \quad (2, 1) \quad (3) . \quad (2.49)$$

Разбиение  $(1, 1, 1)$  соответствует тождественной перестановке, поскольку состоит из трех циклов единичной длины. Разбиение  $(2, 1)$  соответствует перестановкам двух элементов, и, наконец,  $(3)$  соответствует циклам длины 3.

В виде таблиц Юнга, данные классы смежных элементов представимы в следующем виде:



Задача 2.14. Построить таблицы Юнга для  $S_4$ .

Для группы  $S_n$  количество классов сопряженных элементов, а, значит, и количество различных неприводимых представлений, совпадает с количеством различных разбиений числа  $n$ . В свою очередь, разбиения можно представить графически с помощью таблиц Юнга. Данный факт позволяет находить неприводимые представления  $S_n$  используя таблицы Юнга. Приведем соответствующий алгоритм без строго математического обоснования.

1. Начнем с рассмотрения пространства регулярного представления  $S_n$ , в котором, как известно, содержатся все неприводимые представления группы. Для обозначения базисных векторов пространстве регулярного представления, введем следующее правило. Пусть  $g \in S_n$  осуществляет перестановку  $n$  объектов вида

$$1, 2, \dots, n \rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n .$$

Будем обозначать базисный вектор пространства регулярного представления, соответствующий  $g$ , как  $|a_1 a_2 \dots a_n\rangle$ .

2. Для заданной таблицы Юнга, существует  $n!$  способов вписать в клетки таблицы  $n$  номеров. Сопоставим каждому подобному присвоению номеров клеткам элемент из пространства регулярного представления  $S_n$  следующим образом.

2а. Сначала выпишем расставленные в таблице числа, считывая их слева-направо и, затем сверху-вниз. Это даст некоторый вектор из пространства регулярного представления  $S_n$ . При этом выбор конкретного правила выписывания чисел из таблицы Юнга не важен, необходимо только чтобы оно было однозначным.

Например, приведенной на рисунке 4 расстановки чисел в диаграмме Юнга соответствует вектор  $|213\rangle$  из пространства регулярного представления. Данный вектор соответствует перестановке  $a_3 = (12)(3)$ , поскольку именно она осуществляет перестановку  $1, 2, 3 \rightarrow 2, 1, 3$ .

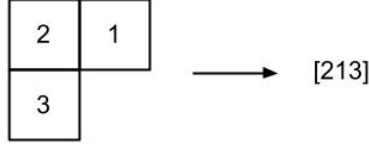


Рис. 4: Одна из возможных расстановок чисел для таблицы Юнга для  $S_3$ .

2б. Для каждой из возможных расстановок чисел, симметризуем полученное состояние по номерам, стоящим в строках таблицы Юнга, и антисимметризуем по номерам, стоящим в столбцах.

Для приведенной выше расстановке чисел для таблицы Юнга для  $S_3$ , данная процедура дает

$$|213\rangle \rightarrow |213\rangle + |123\rangle - |312\rangle - |132\rangle . \quad (2.50)$$

Для оставшихся возможных расстановок чисел в данной таблице Юнга имеем:

$$\begin{aligned} |123\rangle &\rightarrow |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |231\rangle \\ |132\rangle &\rightarrow |132\rangle + |312\rangle - |231\rangle - |321\rangle \\ |312\rangle &\rightarrow |312\rangle + |132\rangle - |213\rangle - |123\rangle \\ |321\rangle &\rightarrow |321\rangle + |132\rangle - |213\rangle - |123\rangle \\ |231\rangle &\rightarrow |231\rangle + |321\rangle - |132\rangle - |312\rangle \end{aligned}$$

3. Линейное пространство, базисом которого являются полученные вектора, является пространством неприводимого представления  $S_n$ . Выделяя из пространства регулярного представления соответствующее подпространство, можно найти явный вид неприводимого представления  $S_n$ , соответствующего рассматриваемой таблице Юнга.

Как можно убедиться, для рассматриваемой таблицы Юнга для  $S_3$  только 2 из 6 векторов линейно независимы. Поэтому соответствующее пространство неприводимого представления двумерно.

4. Повторяя шаги 2 и 3 для всех таблиц Юнга, можно найти явный вид оставшихся неприводимых представлений.

Задача 2.15. Используя приведенный алгоритм, найти все неприводимые представления группы  $S_3$ .

## 3 Матричные группы и группы Ли

По сравнению с конечными группами, матричные группы имеют гораздо более широкое применение в физике. Это обусловлено тем, что матрицы являются достаточно простым объектом, и, в то же время, охватывают большой спектр возможных применений.

### 3.1 Матричные группы

- <sub>3.1</sub> Множество всех невырожденных действительных (комплексных) квадратных матриц  $n$  на  $n$  с матричным законом умножения называется группой  $GL(n, \mathbb{R})$  ( $GL(n, \mathbb{C})$ ).

Аббревиатура  $GL$  означает general linear. В дальнейшем под  $\mathbb{K}$  будет пониматься  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , когда данная разница несущественна.

Легко проверить, что  $GL(n, \mathbb{K})$  действительно обладает всеми необходимыми групповыми свойствами. В частности, невырожденность матриц гарантирует существование обратного элемента. Из  $GL(n, \mathbb{K})$  можно выделить различные подгруппы:

- <sub>3.2</sub> Группа  $G$  называется матричной, если она изоморфна некоторой подгруппе  $H \subset GL(n, \mathbb{K})$ .

Приведём пример некоторых подгрупп из  $GL(n, \mathbb{K})$ . Все из них играют важную роль в физике и будут подробно изучены в дальнейшем.

**Пример 3.1.**  $SL(n, \mathbb{K})$  — множество всех матриц  $GL(n, \mathbb{K})$  с единичным детерминантом (SL — special linear). Поскольку для двух произвольных матриц  $A$  и  $B$  выполняется

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \quad (3.1)$$

$SL(n, \mathbb{K})$  действительно образует группу.

**Пример 3.2.**  $O(n)$  — множество всех действительных ортогональных (O — orthogonal) матриц:

$$O^T O = E. \quad (3.2)$$

*Задача 3.1.* Показать, что  $O(n)$  действительно является группой.

**Пример 3.3.**  $SO(n)$  — множество всех ортогональных матриц с единичным детерминантом:

$$O^T O = E \cap \det(O) = 1. \quad (3.3)$$

Таким образом,  $SO(n)$  является подгруппой  $O(n)$ .

**Пример 3.4.**  $U(n)$  — множество комплекснозначных унитарных (U — unitary) матриц:

$$U^\dagger U = 1. \quad (3.4)$$

**Пример 3.5.**  $SU(n)$  — подгруппа  $U(n)$ , состоящая из матриц с единичным детерминантом:

$$U^\dagger U = 1 \cap \det(U) = 1. \quad (3.5)$$

На матричные группы без изменения переносятся все определения из конечных групп, за исключением неприменимого понятия порядка группы.

Задача 3.2. Показать, что центр группы  $SU(n)$  изоморфен  $Z_n$ .

Задача 3.3. Показать, что  $SU(n)/Z_2$ , где  $Z_2$  — центр  $SU(2)$ , изоморфен  $SO(3)$ .

Задача 3.4. Рассмотрим  $SO(n)$  и её подгруппу  $SO(n-1)$  вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in SO(n-1). \quad (3.6)$$

Показать, что  $SO(n)/SO(n-1)$ , как множество элементов, изоморфно  $(n-1)$ -мерной сфере единичного радиуса,  $S^{n-1}$ .

Некоторые из перечисленных групп можно представить себе наглядно. Например, группу  $SO(2)$  можно представить как группу вращений двухмерного евклидова пространства. Действительно, в силу определения, ур. (3.3), произвольную матрицу из  $SO(2)$  можно представить в виде

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Как известно из линейной алгебры, подобные матрицы представляют поворот в  $\mathbb{R}^2$  на угол  $\alpha$ . Если дополнить повороты возможностью отражения координат, то подобные преобразования будут соответствовать некоторому элементу группы  $O(2)$ . В случае  $n$ -мерного пространства подобные преобразования обобщаются на матрицы из групп  $SO(n)$  и  $O(n)$  соответственно.

Также, как и для конечных групп, можно дать определения некоторых матричных групп через их определяющее представление, то есть, как множество симметрий некоторого объекта. Например, группы  $O(3)$  и  $SO(3)$  можно рассматривать как группу симметрий двухмерной сферы  $S^2$ , включающих и не включающих отражение координат соответственно. Подчеркнём, однако, что это наглядный способ думать о некоторых группах, в то время как сами группы — это абстрактные множество с заданным законом умножения.

## 3.2 Линейные представления матричных групп

Очень часто для построения физических моделей с заданными симметриями используются так называемые линейные представления. С одной стороны, они являются достаточно простыми, а с другой стороны, применимы в большом спектре случаев.

○<sub>3.3</sub> Оператор  $T$ , действующий в векторном пространстве  $V$ , называется линейным, если

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \leftrightarrow T(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha T(\psi_1) + \beta T(\psi_2) . \quad (3.8)$$

○<sub>3.4</sub> Представление группы  $G$  в векторном пространстве  $V$  называется линейным, если  $\forall g \in G$   $T(g)$  является линейным оператором.

**Пример 3.6.** Как легко убедиться, действие группы  $SO(3)$  в трёхмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  линейно.

Для линейных представлений оказывается возможным ввести операции сложения и умножения на число согласно формуле

$$(\alpha \cdot T(g_1) \oplus \beta \cdot T(g_2)) \psi = \alpha T(g_1)\psi + \beta T(g_2)\psi , \quad (3.9)$$

где  $\oplus$  и  $\cdot$  означают операцию сложения двух представлений и умножения представления на число соответственно. Таким образом, если представление  $T$  линейно, то множество всех  $T(g)$  имеет структуру векторного пространства. Это, в свою очередь, означает, что  $T$  представимо в виде матриц. Докажем данное утверждение.

*Утверждение 3.1* Все линейные представления представимы в виде матриц.

▽ Пусть  $\hat{T}$  — некоторое линейное представление группы  $G$  в пространстве  $V$ . Поскольку  $\hat{T}$  отображает пространство  $V$  в себя, то для произвольного  $g \in G$  и базисных векторов  $e_i$  имеем:

$$\hat{T}(g)e_i = T_{ji}(g)e_j . \quad (3.10)$$

Множество всех  $T_{ji}(g)$  при фиксированном  $g$  образуют матрицу, которую мы будем обозначать как  $T(g)$ . Данные матрицы целиком определяют представление  $\hat{T}$ , то есть его действие на произвольный вектор  $\psi \in V$ :

$$\hat{T}(g)\psi = \hat{T}(g)(\psi_i e_i) = \psi_i \hat{T}(g)e_i = \psi_i T(g)_{ji} e_j , \quad (3.11)$$

где во втором переходе мы воспользовались линейностью представления. Таким образом, действие любого линейного представления можно выразить через действие матрицы на том же пространстве.  $\triangle$

**Пример 3.7.** *Нелинейное представление.* Рассмотрим в качестве  $V$  трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  и группу  $G$ , состоящую также из элементов  $\mathbb{R}^3$  с групповой операцией сложения. Определим представление  $\hat{T}$  группы  $G$  на  $V$  согласно формуле

$$\hat{T}(\vec{a})\vec{r} = \vec{r} + \vec{a}, \quad \vec{r}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3 . \quad (3.12)$$



Данное представление не является линейным. Действительно, представим  $\vec{r}$  в виде  $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$  и предположим, что представление линейно. Тогда имеем

$$T(\vec{a})(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = T(\vec{a})\vec{r}_1 + T(\vec{a})\vec{r}_2 = \vec{r} + 2\vec{a}. \quad (3.13)$$

Но данная формула противоречит ур. (3.12), что доказывает нелинейность представления.

Если отождествить пространство  $\mathbb{R}^3$  из приведенного примера с реальным физическим пространством, то приведенные нелинейные преобразования называются трансляцией координат. Они являются фундаментальной симметрией природы, поскольку, как установлено экспериментально, физические законы не зависят от точки пространства. Данные преобразования можно пополнить сдвигами по времени. Соответствующая симметрия означает, что законы физики неизменны во времени, и проверена с большой точностью.

Заметим, что нелинейные представления не сводятся к действию матриц (если бы это было так, то они были бы линейными). Таким образом, мы показали следующее важное утверждение:

*Все линейные представления, и только они, представимы в виде матриц.*

Это и обуславливает важность и спектр возможных применений линейных представлений.

Опишем как матричные группы возникают как группы симметрий физически интересных систем. Часто на пространстве  $V$  задано скалярное произведение, которое является наблюдаемой величиной. Например, таким скалярным произведением может быть длина вектора из  $\mathbb{R}^3$  или пространственно-временной интервал в пространстве Минковского,  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Тогда группа симметрий подобного скалярного произведения и будет симметрией системы.

Формализуем описанную схему в более общей форме с математической точки зрения. Для этого потребуется ввести понятие билинейной формы:

○<sub>3.5</sub> Функция  $f(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  на векторном пространстве  $V$  называется билинейной формой, если  $\forall x, y, z \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  выполняется

$$f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z) \quad \cap \quad f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z). \quad (3.14)$$

Говорят, что билинейная форма невырождена, если  $f(x, y) = 0$  для всех  $y$  только при  $x = 0$  и  $f(x, y) = 0$  при любом  $x$  только при  $y = 0$ .

Также как и линейный представления, билинейный формы однозначно характеризуются своим значением на базисных векторах  $V$ . Действительно, введём матрицу  $G_{ij}$  как

$$G_{ij} = f(e_i, e_j), \quad (3.15)$$

где  $e_i$  — базис в  $V$ . Тогда для произвольных векторов имеем:

$$f(x, y) = f(x_i e_i, y_j e_j) = x_i G_{ij} y_j. \quad (3.16)$$

Из линейной алгебры известно следующее утверждение: билинейная форма  $f(x, y)$  невырождена тогда и только тогда, когда матрица  $G_{ij}$  невырождена.

На пространстве билинейных форм можно ввести действие  $Z_2$  как перестановку аргументов функции местами. Это позволяет разбить произвольную билинейную форму на симметричную и антисимметричную (по перестановки аргументов) части,

$$f(x, y) = f_s(x, y) + f_a(x, y), \quad f_{s,a}(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) \pm f(y, x)). \quad (3.17)$$

Функции  $f_{s,a}$  называются симметричными и антисимметричными частями билинейной формы соответственно.

- <sub>3.6</sub> Невырожденная симметричная билинейная форма называется скалярным произведением, а её матричные элементы  $g_{ij} = f_s(e_i, e_j)$  — метрикой. Невырожденная антисимметричная билинейная форма называется симплектической формой, а её матричные элементы  $c_{ij} = f_a(e_i, e_j)$  — симплектической метрикой.

Задача 3.5. Показать, что симплектическая форма в нечётномерных пространствах всегда вырождена.

Пусть билинейная форма  $f(x, y)$  в пространстве  $V$  соответствует некоторой наблюдаемой. Тогда представление  $T$  группы  $G$  является симметрией, если

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in V, g \in G \leftrightarrow f(T(g)\psi_1, T(g)\psi_2) = f(\psi_1, \psi_2). \quad (3.18)$$

Группа  $GL(n, \mathbb{R})$  является наиболее общей матричной группой, а любая билинейная форма сводится к заданию подходящей матрицы. Это позволяет ожидать, что группа симметрий произвольной билинейной формы всегда является некоторой подгруппой в  $GL(n, \mathbb{R})$ . Покажем, что это действительно так:

*Утверждение 3.2* Пусть  $\tau$  — множество всех линейных симметрий некоторой невырожденной билинейной формы  $g_{ij}$ . Тогда  $\tau$  образуют подгруппу в  $GL(n, \mathbb{R})$ .

▽ По предположению все симметрии из  $\tau$  линейны, и потому представимы в виде матрицы. Далее, поскольку каждое преобразование из  $\tau$  отображает невырожденную матрицу в невырожденную, соответствующие матрицы также являются невырожденными. Следовательно,  $\tau$  является некоторым подмножеством  $GL(n, \mathbb{R})$ . Покажем, что  $\tau$  образуют группу. Действительно, пусть  $T_1, T_2 \in \tau$ . В матричном виде это означает, что

$$T_1^T g T_1 = g, \quad T_2^T g T_2 = g. \quad (3.19)$$

Тогда композиция  $T_1$  и  $T_2$ , то есть их последовательное применение, также является симметрией:

$$(T_1 T_2)^T g T_1 T_2 = T_2^T (T_1^T g T_1) T_2 = T_2^T g T_2 = g. \quad (3.20)$$

Поскольку  $T_1$  является невырожденной матрицей, к ней существует обратная,  $T_1^{-1}$ . Покажем, что её действие также является симметрией:

$$T_1^T g T_1 = g \Rightarrow (T_1^{-1})^T g T_1^{-1} = g . \quad (3.21)$$

Наконец, умножение в  $\tau$  ассоциативно в силу ассоциативности матричного умножения. Таким образом,  $\tau$  действительно образует подгруппу в  $GL(n, \mathbb{R})$ .  $\triangle$

По сути, в приведённом доказательстве были явно использованы два факта, установленных во введении. Во-первых, композиция симметрий также является симметрией. Во-вторых, обратное преобразование также всегда является симметрией (если существует).

Определение симметрий физических систем через симметрии соответствующих билинейных форм оказывается конструктивным способом их идентификации. Продемонстрируем это утверждение.

**Пример 3.8.** В рамках классической механики наблюдаемой величиной является длина вектора. Соответствующая метрика — это единичная диагональная матрица:

$$g_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1) . \quad (3.22)$$

Множеством всех линейных преобразований координат, оставляющих неизменной данную метрику (а, значит, и длину векторов), является группа  $O(3)$ . Действительно, если преобразование  $M$  является симметрией данной метрики, то должно выполняться

$$M^T g_{ij} M = g_{ij} . \quad (3.23)$$

С учётом явного вида метрики это есть ничто иное как определение группы  $O(3)$ . Таким образом, группа  $O(3)$  является группой симметрий классической механики.

Можно ввести обобщение ортогональной группы на случай, когда метрика является не знакопостоянной. А именно,

○<sub>3.7</sub> Группой  $O(p, q)$  называется множество симметрий метрики вида

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_p, \underbrace{1, \dots, 1}_q) . \quad (3.24)$$

**Пример 3.9.** В специальной теории относительности наблюдаемой величиной является не просто длина вектора, а пространственно-временной интервал. Соответствующая метрика — это метрика Минковского:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) , \quad (3.25)$$

где считается, что первая координата соответствует времени. Группой (линейных) симметрий данного скалярного произведения, а значит и СТО, является группа Лоренца,  $O(1, 3)$ .

Заметим далее, что можно рассматривать также комплекснозначные билинейные формы. В этом случае выделяют понятие эрмитовых форм:

○<sub>3.8</sub> Комплекснозначная билинейная форма  $f_H$  называется эрмитовой, если

$$\forall x, y \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \hookrightarrow f_H(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f_H(x, y) + \beta f_H(x, z) \quad \text{и} \quad f_H(x, y) = f_H^*(y, x). \quad (3.26)$$

Эрмитовы билинейные формы также однозначно характеризуются своим действием на базисные вектора. Подобные формы возникают в случаях, когда пространство действия является комплексным и важны, например, в квантовой механике и классической теории поля.

**Пример 3.10.** Рассмотрим пространство функций, определённых на пространстве Минковского,  $\varphi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^{1,3}$ , и принимающих значения в двумерном комплексном пространстве  $\mathbb{C}^2$ . Иначе говоря,  $\varphi(x)$  является столбцом вида

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}. \quad (3.27)$$

В пространстве таких функций можно ввести скалярное произведение вида

$$(\varphi(x), \varphi(x)) = \varphi^\dagger(x) \varphi(x). \quad (3.28)$$

Найдём все преобразования  $\varphi$ , оставляющих данное скалярное произведение неизменным. Эрмитова билинейная форма  $f_H$ , соответствующая (3.28), записанная в виде матрицы имеет вид

$$h_{ij} \equiv f_h(e_i, e_j) = \text{diag}(1, 1). \quad (3.29)$$

Группой, оставляющей  $h_{ij}$  инвариантной, является группа  $U(2)$ . Действительно, для произвольного элемента  $U \in U(2)$  имеем

$$U^\dagger h U = U^\dagger U = E = h. \quad (3.30)$$

Таким образом, искомая группа симметрий — это  $U(2)$ .

В рамках классической теории поля величины типа  $\varphi(x)$  являются полями, описывающие реальные частицы. В случаях, когда подобные поля имеет симметрии, наподобие рассмотренной, говорят, что модель обладает той или иной симметрией. Как следует из построения, подобные симметрии являются внутренними. Заметим, что  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  симметрия Стандартной модели физики частиц принадлежит именно этому типу симметрий (с точностью до некоторого обобщения).

**Пример 3.11.** В квантовой механике состояние частицы описывается комплекснозначным вектором  $|\Psi\rangle$ , а скалярное произведение

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle \equiv \Psi_1^* \Psi_2 \quad (3.31)$$

задаёт проекцию состояния  $|\Psi_1\rangle$  на  $|\Psi_2\rangle$ . Данное скалярное произведение является одномерной эрмитовой билинейной формой, а его группой симметрий — группа  $U(1)$ .

### 3.3 Группы Ли

Произвольную квадратную матрицу можно рассматривать как элемент векторного пространства  $\mathbb{K}^{n^2}$ . Благодаря этому на пространстве матриц можно ввести базисные вектора и понятие расстояния между матрицами как соответствующее расстояние в  $\mathbb{K}^{n^2}$ . Матричные группы выделяют различные подмножества из  $\mathbb{K}^{n^2}$ , которые оказываются изоморфными векторным пространствам меньшей размерности. Например, произвольная действительная матрица 2 на 2 изоморфна  $\mathbb{R}^4$ , в то время как группа  $SO(2)$  изоморфна  $\mathbb{R}^1$ , поскольку, как мы видели ранее, однозначно задаётся единственным числом.

Понятие групп Ли позволяет обобщить подобные изоморфизмы, рассматривая более сложные пространства, чем  $\mathbb{K}^{n^2}$ . Это позволяет говорить о размерности групп и их геометрических свойствах в общем случае. В свою очередь, знание подобных свойств позволяет лучше понять возможные представления групп и провести их классификацию.

Чтобы ввести понятие групп Ли, необходимо ввести понятие многообразия. Чтобы не углубляться в тонкости определения, неважные для физики, дадим качественное определение многообразия:

○<sub>3.9</sub> Многообразие — это множество, вблизи каждой точки изоморфное  $\mathbb{R}^n$ .

**Пример 3.12.** Двумерная сфера является многообразием. Как множество, она не изоморфна  $\mathbb{R}^2$ , поскольку её невозможно покрыть одной системой всюду хорошо определенных координат. Однако, вблизи любой точки она изоморфна  $\mathbb{R}^2$ , а две системы координат, с центрами в северном и южном полюсах сферы, целиком покрывают её координатами.

Понятие многообразия удобно тем, что выделяет достаточно общий класс множеств, с которыми локально (то есть, вблизи каждой точки) можно работать как с обычным евклидовым пространством. Это позволяет ввести понятия системы координат, кривых, функций и их производных на многообразиях.

Одним из важных геометрических свойств многообразий является понятие односвязности:

○<sub>3.10</sub> Многообразие  $\mathcal{M}$  односвязно, если любую замкнутую кривую можно непрерывно деформировать в точку.

**Пример 3.13.** Пространства  $\mathbb{R}^n$  и  $S^n$  являются односвязными, а  $\mathbb{R}^n \setminus 0$  нет.

Теперь можно ввести понятие групп Ли:

○<sub>3.11</sub> Группа  $G$  называется группой Ли, если  $G$  как множество является гладким (то есть, бесконечно дифференцируемым) многообразием. Размерностью  $G$  называют размерность соответствующего многообразия.

**Пример 3.14.** Все матричные группы являются группами Ли. Например,  $GL(n, \mathbb{R})$  вблизи любой точки эквивалентна  $\mathbb{R}^n$ , поскольку каждый из элементов матрицы можно непрерывно изменять независимо от остальных элементов.

**Пример 3.15.** Покажем, что группа  $SU(2)$  как множество изоморфна  $S^3$ . Произвольная матрица  $M \in SU(2)$  должна удовлетворять ур. (3.5). Расписывая последнее в компонентах, можно показать, что  $M$  представима в виде

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix} \cap \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1. \quad (3.32)$$

Перепишем последнее требование через действительные и мнимые компоненты  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ ,

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1. \quad (3.33)$$

Как следует из данного уравнения,  $SU(2)$  действительно изоморфна  $S^3$  и, таким образом, является односвязным многообразием.

**Пример 3.16.** *Неодносвязная группа.* Группа  $SO(3)$  не односвязна. Чтобы доказать это, вспомним, произвольный поворот однозначно характеризуется осью и углом поворота. Пусть  $\vec{r}$  задаёт ось поворота, а  $|\vec{r}|$  — угол. Тогда произвольный поворот представим как точка внутри трехмерного шара радиуса  $\pi$ : радиус-вектор из начала координат фиксирует ось, а модуль радиус-вектора — угол поворота. При этом поворот вдоль  $\vec{r}$  на угол  $\pi$  эквивалентен повороту вдоль  $-\vec{r}$  на угол  $-\pi$ . Поэтому диаметрально противоположные концы шара должны быть отождествлены, и группа  $SO(3)$  изоморфна подобному многообразию.

Построим кривую на описанном шаре следующим образом (рисунок 5). Зафиксируем произвольное направление и будем постепенно увеличивать угол поворота с 0 до  $\pi$  радиан. В конце данного процесса мы окажемся на границе шара. Будем теперь увеличивать угол поворота далее от  $\pi$  до  $2\pi$ . При этом кривая продолжится на диаметрально противоположной стороне шара, поскольку поворот вдоль  $\vec{r}$  на угол  $\pi + \alpha$  эквивалентен повороту вдоль  $-\vec{r}$  на угол  $\pi - \alpha$ . Конечная точка соответствует повороту на угол  $2\pi$ , то есть, единичному преобразованию. Таким образом, мы построили замкнутую кривую, изображенную на рисунке 5. Понятно, что в силу особенности на границе её невозможно деформировать в точку. Поэтому группа  $SO(3)$  не односвязна.

### 3.4 Алгебры Ли

Как мы видели, на группах Ли можно проводить различные линии. Это оказывается полезным для установления их локальных свойств. А именно, пусть  $q$  — произвольная точка в группе Ли. Проведём через неё всевозможные линии и найдем касательные к ним вектора. Множество данных векторов образуют линейное пространство, в котором можно выделить

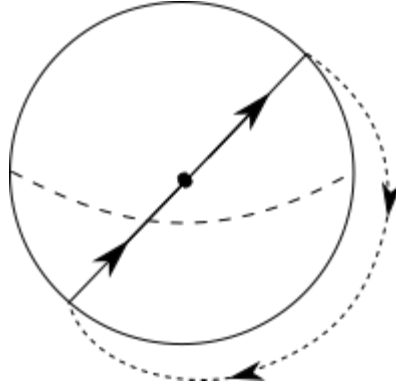


Рис. 5: Кривая на шаре с отождествленными диаметрально противоположными концами.

базис. Размерность данного пространства говорит о том, сколько существует независимых направлений смещения в группе. Также изучение его структуры отображает информацию о групповом законе умножения. Это мотивирует введение следующего определения:

○<sub>3.12</sub> Алгеброй Ли группы  $G$  называется касательное пространство соответствующей группы Ли вблизи единичного элемента. Генераторами называются базисные вектора алгебры Ли.

*Задача 3.6.* Показать, что касательные пространства в различных точках группы изоморфны.

Если рассматриваемая группа  $G$  матричная, то алгебра Ли состоит из всех матриц  $A$ , для которых

$$g(t) = E + At + O(t^2) \in G, \quad t \rightarrow 0. \quad (3.34)$$

**Пример 3.17.** Алгебра группы  $U(n)$  состоит из таких матриц  $A$ , что

$$(E + At)(E + A^\dagger t) = E, \quad (3.35)$$

где мы опустили все члены порядка  $t^2$  и более. Раскрывая скобки и оставляя лидирующий вклад, имеем

$$A^\dagger = -A. \quad (3.36)$$

Таким образом, алгебра  $U(n)$  — это множество всех антиэрмитовых матриц  $n$  на  $n$ .

Можно найти размерность данного пространства. Произвольная комплексная матрица  $n$  на  $n$  имеет  $2n^2$  независимых компонент. Посчитаем, сколько ограничений накладывает условие антиэрмитовости. Для каждого из  $n$  диагональных элементов ур. (3.36) накладывает одно ограничение — комплексная часть диагональных элементов равна нулю. Уравнения на верхние и нижние внедиагональные элементы оказываются комплексно сопряженными.

Поэтому имеется еще только  $\frac{n^2-n}{2}$  независимых комплексных уравнений. Поскольку комплексное уравнение является парой действительных уравнений, для количества независимых компонент матриц из алгебры  $U(n)$  имеем

$$2n^2 - n - 2 * \frac{n^2 - n}{2} = n^2 . \quad (3.37)$$

Это и есть размерность алгебры  $U(n)$ .

Задача 3.7. Описать алгебры групп  $SU(n)$  и  $SO(n)$ , а также найти их размерности.

Аналогом группового закона умножения в алгебре Ли является коммутация элементов из алгебры.

○<sub>3.13</sub> Коммутатором двух матриц  $A$  и  $B$ , обозначаемым как  $[A, B]$ , называется выражение

$$[A, B] = AB - BA . \quad (3.38)$$

*Утверждение 3.3* Множество  $\mathcal{A}$  всех элементов алгебры группы Ли является векторным пространством, причём если  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ , то  $[A_1, A_2] \in \mathcal{A}$ .

▽ Пусть  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$  и определяются кривым

$$g_1(t) = E + A_1 t + O(t^2), \quad g_2(t) = E + A_2 t + O(t^2) \quad (3.39)$$

соответственно. Тогда для произвольного  $\alpha \in \mathbb{R}$   $\alpha A_1$  соответствует кривой  $g_1(\alpha t)$ . Сумме двух элементов алгебры,  $A_1 + A_2$ , соответствует кривая

$$g_{12}(t) = g_1(t)g_2(t) = E + (A_1 + A_2)t + O(t^2) . \quad (3.40)$$

Таким образом,  $\mathcal{A}$  является векторным пространством. Покажем теперь, что  $[A_1, A_2]$  также принадлежит алгебре. Рассмотрим кривую вида

$$g(t) = g_1(s)g_2(s)g_1^{-1}(s)g_2^{-1}(s), \quad s = \sqrt{t} . \quad (3.41)$$

Раскрывая произведения и учитывая члены до порядка  $s^2$  включительно, получим

$$g(t) = E + [A_1, A_2]s^2 + O(s^3) = E + [A_1, A_2]t + o(t) . \quad (3.42)$$

Данное равенство показывает, что  $[A_1, A_2]$  действительно принадлежит алгебре.  $\triangle$

Задача 3.8. Доказать формулу (3.42).

Суммируя сказанное, алгебра Ли группы  $G$  является векторным пространством, замкнутым относительно операции коммутации её элементов. Алгебру Ли, соответствующую группе Ли  $G$ , в дальнейшем мы будем обозначать как  $AG$ .

Пусть  $\{A_i\}$  образуют базис в алгебре Ли. Тогда имеем

$$[A_i, A_j] = c_{ijk}A_k . \quad (3.43)$$



○<sub>3.14</sub> Коэффициенты  $c_{ijk}$  называются структурными константами алгебры.

Каждая алгебра Ли однозначно характеризуется значением структурных констант. Они отображают её структуру и являются, в некотором смысле, отражением закона группового умножения на уровне алгебры.

**Пример 3.18.** Рассмотрим  $ASU(2)$ . Она состоит из антиэрмитовых бесследовых матриц,

$$A^\dagger = -A \quad \cap \quad \text{Tr}A = 0, \quad (3.44)$$

и имеет размерность три. Канонический базис в  $ASU(2)$  имеет вид  $A_i = -\frac{i}{2}\tau_i$ , где  $\tau_i$  — матрицы Паули:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Как можно убедиться, их закон коммутации имеет вид

$$[\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ijk}\tau_k, \quad (3.46)$$

где  $\epsilon_{ijk}$  — абсолютно антисимметричный тензор. Таким образом, структурные константы  $ASU(2)$  — это  $\epsilon_{ijk}$ .

Заметим, что на практике часто удобнее рассматривать эрмитовы матрицы, а не антиэрмитовы. Поэтому иногда, особенно в физической литературе, в определении базисных элементов  $ASU(n)$  матрицы умножаются на мнимую единицу. Мы не будем придерживаться этого соглашения, если не оговорено противное.

Задача 3.9. Построить  $ASO(3)$  и найти её структурные константы. Обобщить результат на случай  $ASO(n)$ .

Как в любой алгебре, в алгебрах Ли можно выделять подалгебры:

○<sub>3.15</sub> Подмножество  $\mathcal{B}$  алгебры  $AG$  называется подалгеброй, если оно образует векторное пространство и замкнуто относительно операции коммутации своих элементов.

○<sub>3.16</sub> Подалгебра Ли  $\mathcal{B}$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$  называется инвариантной подалгеброй (или идеалом), если

$$\forall b \in \mathcal{B}, \forall a \in \mathcal{A} \mapsto [b, a] \in \mathcal{B}. \quad (3.47)$$

При этом между подгруппами  $H \subset G$  и подалгебрами  $\mathcal{B} \subset AG$  имеется ожидаемая связь, которую мы сформулируем в виде задачи:

Задача 3.10. Пусть  $H$  — подгруппа в  $G$ . Показать, что  $AH$  является подалгеброй в  $AG$ . Показать, что если  $H$  — инвариантная подгруппа, то  $AH$  — инвариантная подалгебра.

Понятие односвязности групп Ли играет одну из ключевых ролей в нахождении всевозможных представлений групп. Приведём без доказательства следующее утверждение:

*Утверждение 3.4* Для любой алгебры Ли группы  $G$  существует и единственна односвязная группа  $\tilde{G}$ , алгебра Ли которой совпадает с  $AG$ . Все представления группы Ли  $G$  одновременно являются и представлениями группы  $G$ .

Это означает, что

*Для изучения всевозможных представлений групп достаточно изучить все представления односвязных групп.*

○<sub>3.17</sub> Группа  $\tilde{G}$  из утверждения выше называется универсальной накрывающей группы  $G$ .

*Задача 3.11.* Показать, что алгебры  $ASO(3)$  и  $ASU(2)$  изоморфны.

Из данной задачи следует, что хотя как группы множества  $SO(3)$  и  $SU(2)$  различны, локально они совпадают. Однако, группа  $SU(2)$  односвязна, а  $SO(3)$  нет. Поэтому  $SU(2)$  является универсальной накрывающей группы  $SO(3)$  и все представления группы  $SO(3)$  содержатся в представлении  $SU(2)$ . Данный факт широко используется в физике (например, при введении понятия спина в квантовой механике) и будет также использован нами в дальнейшем.

### 3.5 Представления групп и алгебр Ли

Понятие алгебр Ли тесно связана с соответствующей группой, а потому и с понятием симметрий. Это мотивирует рассмотрение представления алгебр Ли:

○<sub>3.18</sub> Представлением  $T$  алгебры Ли  $AG$  в пространстве  $V$  называется отображение, ставящее каждому элементу алгебры  $A \in AG$  оператор  $T(A) : V \rightarrow V$ . При этом для произвольных  $A, B \in GA$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  должно выполняться:

$$1) T(A + B) = T(A) + T(B), \quad 2) T(\alpha A) = \alpha T(A), \quad 3) T([A, B]) = [T(A), T(B)]. \quad (3.48)$$

Как и в случае представления групп, действие  $T$  должно быть согласованно со структурой алгебры.

Алгебра Ли группы  $G$  получается путём разложения элементов группы вблизи единицы. Это позволяет схожим образом получить представление алгебры по заданному представлению группы  $T$ . А именно, пусть  $T$  — представление группы  $G$  в пространстве  $V$ . Тогда можно определить представление алгебры Ли  $\tilde{T}$  согласно формуле

$$T(1 + \epsilon A) = 1 + \epsilon \tilde{T}(A). \quad (3.49)$$

Здесь  $\epsilon$  — бесконечно малая величина,  $A \in AG$ , и единица в правой части уравнения понимается как единичный оператор.

Задача 3.12. Показать, что  $\tilde{A}$  действительно является представлением алгебры.

Действуя также, как при изучении алгебры  $SU(n)$  можно показать, что если представление  $T$  унитарно, то  $\tilde{T}$  — антиэрмитово.

Перечислим основные представления групп Ли, которые часто встречаются в физике и играют важную роль в различных построениях.

1) *Тривиальное представление:*  $\forall g \in G \ T(g) = 1$ .

2) *Фундаментальное представление* (определяющее). Пусть  $G$  — матричная группа, состоящая из матриц  $n$  на  $n$ . Тогда фундаментальным представлением  $G$  называется представление  $T$ , действующее в  $n$ -мерном пространстве  $V$  согласно правилу

$$\forall g \in G, v \in V : \quad T(g)v = gv, \quad (3.50)$$

где  $v$  рассматривается как  $n$ -компонентный столбец. То есть, каждый элемент группы действует как матрица. Действие  $SO(3)$  в  $\mathbb{R}^3$  как вращение координат является примером фундаментального представления группы.

3) *Антифундаментальное представление* (представление, сопряженное фундаментальному). Аналогично фундаментальному представлению, только действие определяется как

$$\forall g \in G, v \in V : \quad T(g)v = g^*v. \quad (3.51)$$

Задача 3.13. Показать, что фундаментальное представление  $SU(2)$  эквивалентно антифундаментальному.

Задача 3.14. Пусть  $T$  — представление  $ASU(2)$ , индуцированное фундаментальным представлением  $SU(2)$ . Как следует из предыдущей задачи,  $T$  также является представлением  $ASO(3)$ . Показать, что не существует представления  $\tilde{T}$  группы  $SO(3)$ , которое индуцировало бы представление  $T$ .

По аналогии с введёнными определениями также вводятся понятия фундаментального и антифундаментального представлений алгебр Ли.

4) *Присоединённое представление.* Пусть  $G$  — группа Ли,  $AG$  — соответствующая алгебра Ли. Тогда присоединённым представлением, обозначаемым как  $Ad$ , называется действие  $G$  в  $AG$  согласно правилу

$$\forall g \in G, A \in AG : \quad Ad(g)A = gAg^{-1}. \quad (3.52)$$

Покажем, что присоединённое представление действительно является представлением. Пусть  $g_a(t)$  — кривая на группе Ли, касательный вектор к которой в единице определяет элемент алгебры  $A$ . Пусть далее  $g$  — произвольный элемент из  $G$ . Тогда  $g^{-1}Ag$  соответствует кривой  $gg_a(t)g^{-1}$ , к которой также существует касательный вектор. Он и является

результатом действия присоединённого представления на  $A$ . Далее, для композиции действия присоединённого представлений имеем

$$Ad(g_1)Ad(g_2)A = g_1(g_2Ag_2^{-1})g_1^{-1} = (g_1g_2)A(g_1g_2)^{-1} = Ad(g_1g_2)A. \quad (3.53)$$

Таким образом выполняются все требования, предъявляемые к представлению группы.

Присоединённое представление группы Ли индуцирует согласно формуле (3.48) присоединённое представление алгебры Ли,  $ad$ , действующее на саму себя. А именно, пусть  $g = 1 + \epsilon B + o(\epsilon^2)$ . Тогда, по определению, действие  $ad$  имеет вид

$$ad(B)A = [B, A] : \quad Ad(g)A = (1 + \epsilon B)A(1 - \epsilon B) = A + \epsilon[B, A]. \quad (3.54)$$

Воспользовавшись ур. (3.43) можно записать

$$ad(A_i) = (c_i)_{jk}. \quad (3.55)$$

Таким образом присоединённое представление алгебры задаётся матрицей структурных констант.

Чтобы привести содержательные примеры применения упомянутых представлений, необходимо сначала обсудить понятие поля и его физическую интерпретацию.

В теоретической механике основным объектом рассмотрения являются обобщенные степени свободы. Пусть  $q(t)$  — подобная степень свободы, соответствующая, например, координате материальной точки. Задача теоретической механики — это предсказание значения  $q$  в последующие моменты времени. При этом считается, что динамика системы определяется действием, а уравнения движения соответствуют нахождению экстремума последнего.

Рассмотрим случай, когда  $q$  принимает значения в  $\mathbb{R}^1$ , то есть, рассматриваемая задача движения одномерна, а действие имеет вид

$$S = \int dt \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{m^2}{2} q^2, \quad (3.56)$$

где точка означает дифференцирование по времени. Представим теперь, что таких степеней свободы несколько, а именно, бесконечно много, и они расположены на прямой на расстоянии  $a$  друг от друга. Тогда для описания подобной системы необходимо ввести у  $q$  дополнительный индекс,  $q_p$ , характеризующий горизонтальное положение степени свободы.

Устремим теперь расстояние  $a$  к нулю. В этом случае индекс  $p$  становится непрерывным и удобно писать  $q(x, t)$ , где  $x$  — координата частицы. Подобные объекты называются полями и, как показывает построение, о них можно думать как о степенях свободы, расположенных в каждой точке пространства. В частности, поскольку поле  $q(x, t)$  теперь является также функцией координат, можно рассматривать не только временные, но и пространственные

производные полей. Иначе говоря, вместо действия (3.56) можно рассматривать объект более общего вида:

$$S = \int dt dx \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + q'^2) - \frac{m^2}{2}q^2, \quad (3.57)$$

где штрих означает дифференцирование по координате. В частности, про член  $q'^2$  можно думать как о натяжении, то есть, взаимодействии, между соседними степенями свободы. Лагранжианы подобного вида позволяют изучать динамику системы (поля) в общем случае.

**Пример 3.19.** Четыре–потенциал, или, что то же самое, напряженность электрического и магнитного полей, являются полями. С математической точки зрения они являются просто функциями над пространством Минковского. Однако на микроуровне электромагнитное поле является набором фотонов, являющихся квантами электромагнитного поля.

В теории поля наибольший интерес представляет случай, когда поля являются функциями на пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$ . При этом поля могут принимать значения не только в  $\mathbb{R}^1$ , но и более сложных пространствах, таких как, например,  $\mathbb{C}^n$ .

**Пример 3.20.** Пусть  $\varphi$  — элемент  $\mathbb{C}^n$ , то есть, комплексный столбец длины  $n$ . Пусть далее на  $\mathbb{C}^n$  действует  $SU(n)$  в фундаментальном представлении. Тогда выражения вида

$$(\varphi^\dagger \varphi)^m, \quad (3.58)$$

где  $m$  — произвольное целое число, являются  $SU(n)$  инвариантны. Подобные члены называются потенциальными. Если сделать  $\varphi$  функциями из  $\mathbb{R}^{1,3}$  в  $\mathbb{C}^n$ , то  $SU(n)$ -инвариантным также оказывается выражения вида

$$(\partial_\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi)^k, \quad (3.59)$$

где  $\partial_\mu$  — оператор частной производной вдоль  $\mu$ -ой координаты (мы добавили суммирование по  $\mu$  чтобы сделать выражение Лоренц-инвариантным), а  $k$  — произвольное целое число. Подобные выражения называют кинетическим членом, поскольку они содержат производные полей.

Предположим, что экспериментально установлено, что поле  $\varphi$  описывает некоторую частицу, а соответствующая модель должна обладать  $SU(n)$  симметрией. Или, по каким-либо соображениям, подобная модель представляет теоретический интерес. Тогда можно поставить следующий вопрос: каков наиболее общий вид лагранжиана с заданной симметрией? Ответ легко получить — это сумма выражений вида (3.58) и (3.59) с произвольными коэффициентами. Однако, из соображений стабильности решения рассматривают, как правило, не более чем квадратичные кинетические члены. Также по соображениям из квантовой теории поля потенциальные члены ограничивают четвёртым порядком по полям включительно. Таким образом, наиболее общее действие можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \int d^4x \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^\dagger \varphi - \frac{\lambda}{4} (\varphi^\dagger \varphi)^4, \quad (3.60)$$

где  $m^2$ ,  $\lambda$  — некоторые постоянные.

Изложенный пример демонстрирует пользу от применения теории групп в физике — она позволяет достаточно просто и конструктивно строить наиболее общие модели с заданными симметриями.

**Пример 3.21.** Пусть  $\varphi$  — двумерное комплексное поле, преобразующееся по фундаментальному представлению  $SU(2)$ . Пусть также поле  $\xi$  принадлежит присоединённому представлению  $SU(2)$ . Последнее означает, что  $\xi$  принимает значение в  $ASU(2)$ , и, соответственно, его можно разложить по базису алгебры,

$$\xi = \xi^a \tau^a, \quad (3.61)$$

где  $\tau^a$  — введенные ранее матрицы Паули. Таким образом  $\xi$  является триплетом, то есть, тройкой полей  $\xi^a$ , в соответствии с количеством матриц Паули. Законы преобразования полей под действием  $SU(2)$  имеют вид

$$\tilde{\varphi} = \omega \varphi, \quad \tilde{\xi} = \omega \xi \omega^{-1}, \quad \omega \in SU(2), \quad (3.62)$$

где тильда используется для обозначения преобразованных полей. Наиболее общее действие четвертого порядка, составленный из данных полей и обладающей  $SU(2)$  симметрией, имеет вид

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi + \frac{1}{2} \text{Tr}(\partial_\mu \xi \partial_\mu \xi) - \frac{m_\varphi^2}{2} \varphi^\dagger \varphi - \frac{m_\xi^2}{2} \text{Tr}(\xi \xi) - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_\varphi}{4} (\varphi^\dagger \varphi)^4 - \frac{\lambda_\xi}{4} \text{Tr}(\xi^4) - \lambda_3 \varphi^\dagger \xi \varphi \right]. \quad (3.63)$$

Действительно, для преобразованных полей

$$\text{Tr}(\tilde{\xi}^2) = \text{Tr}(\omega \xi \omega^{-1} \omega \xi \omega^{-1}) = \text{Tr}(\xi^2), \quad (3.64)$$

где мы воспользовались цикличностью следа. Также

$$\tilde{\varphi}^\dagger \tilde{\xi} \tilde{\varphi} = \varphi^\dagger \omega^\dagger \omega \xi \omega^{-1} \omega \varphi = \varphi^\dagger \xi \varphi, \quad (3.65)$$

где была использована унитарность матриц  $\omega$ . Следовательно выписанный лагранжиан действительно  $SU(2)$  инвариантен.

В стандартной модели физики частиц бозон Хиггса принадлежит присоединённому представлению группы  $SU(2)$ , а лагранжианы типа (3.63) описывают его взаимодействие с другими полями.

*Задача 3.15.* Переписать лагранжиан (3.63) в покомпонентном виде, то есть, представив поля  $\varphi$  и  $\xi$  в виде  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ ,  $\xi = \xi^a \tau^a$ .

Как демонстрирует данный пример, задание модели не сводится только к заданию группы симметрии. Необходимо также задать каким представлениям группы принадлежат рассматриваемые поля.

**Пример 3.22.** Поля могут иметь нетривиальные трансформационные свойства под действием различных групп симметрий. Построим, например,  $SU(2) \times U(1)$  инвариантную модель. Пусть поля  $\varphi$ ,  $\chi$  преобразуются по фундаментальному представлению группы  $SU(2)$ , а  $\xi$  является комплексным полем, преобразующемся по тривиальному представлению. Пусть далее под действием  $U(1)$  поля  $\varphi$ ,  $\chi$  и  $\xi$  имеют заряды  $q_\varphi$ ,  $q_\chi$ ,  $q_\xi$  соответственно, что означает, что они преобразуются согласно закону

$$\tilde{\varphi} = e^{iq_\varphi\alpha}\varphi, \quad \tilde{\chi} = e^{iq_\chi\alpha}, \quad \tilde{\xi} = e^{iq_\xi\alpha}\xi, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.66)$$

Тогда если между зарядами полей выполняется соотношение

$$q_\varphi = q_\chi + q_\xi, \quad (3.67)$$

то можно построить следующее  $SU(2) \times U(1)$ -инвариантное взаимодействие между полями:

$$\lambda(\varphi^\dagger \xi \chi + \chi^\dagger \xi^* \varphi). \quad (3.68)$$

*Задача 3.16.* В условиях предыдущего примера положим  $q_\varphi + q_\chi + q_\xi = 0$ . Возможно ли подобрать такие представления полей  $\varphi$  и  $\chi$  по группе  $SU(2)$ , что можно выписать  $SU(2) \times U(1)$ -инвариантное кубическое взаимодействие полей  $\varphi$ ,  $\chi$  и  $\xi$ ?

## 3.6 Компактные группы Ли

Группы Ли можно рассматривать как многообразия, поэтому к ним применимо понятие компактности:

○<sub>3.19</sub> Группа Ли называется компактной, если компактно соответствующее многообразие. Компактными алгебрами Ли называют алгебры Ли, соответствующие компактным группам.

Имеет место следующее утверждение, которое мы приведём без доказательства:

*Утверждение 3.5* Алгебра Ли компактна тогда и только тогда, когда в ней существует положительно определенное скалярное произведение, инвариантное относительно присоединённого представления алгебры.

Для матричных групп и алгебр соответствующим скалярным произведением является

$$(A, B) = -\text{Tr}(AB). \quad (3.69)$$

Оно оказывается положительно определено только для компактных алгебр.

*Задача 3.17.* Показать, что группы  $SO(n)$  и  $SU(n)$  компактны, а  $GL(n, \mathbb{K})$  нет. Доказать, что скалярное произведение (3.69) положительно определено в  $ASU(2)$ , а в  $AGL(2, \mathbb{C})$  не является знакоопределенным.

Важность компактных групп в физике обусловлена тем, что только модели с внутренними симметриями данного класса не являются заведомо плохо определенными. Например, как известно из теоретической механики, энергия системы всегда должны быть ограничена снизу: в противном случае ни одно из её решений не является стабильным. В моделях с некомпактными группами симметрий данное требование не выполняется. Исходя из этого всюду далее мы ограничимся рассмотрением только компактных групп как возможных внутренних групп симметрий.

Для выделения всевозможных компактных групп Ли оказывается полезным следующее определение:

- <sub>3.20</sub> Компактная алгебра Ли называется простой (полупростой), если она не содержит инвариантных (абелевых инвариантных) подалгебр.

Все компактные алгебры Ли известны и имеет место следующее утверждение:

*Утверждение 3.6* Любая компактная алгебра Ли представима единственным образом в виде прямой суммы некоторого набора  $U(1)$  алгебр и простых подалгебр. Любое представление компактной группы Ли эквивалентно унитарному, а алгебры Ли — антиэрмитовому.

Как следствие, для изучения компактных алгебр Ли оказывается достаточным ограничиться рассмотрением простых алгебр Ли и  $AU(1)$ .



## 4 $SU(2)$ и квантовая механика

Группа  $SU(2)$  играет исключительную роль как в физике, так и математике. В физике её значимость обусловлена тем, что она является универсальной накрывающей группы  $SO(3)$ , группы симметрий классической и квантовой механики, а потому содержит все её представления. Это позволяет проклассифицировать все объекты в соответствии с тем, по какому неприводимому представлению группы  $SU(2)$  они преобразуются. В частности, в квантовой механике это приводит к понятию спина.

С математической точки зрения группа  $SU(2)$  важна тем, что представление любой другой группы как внутренней группы симметрий сводится к комбинированию представлением  $SU(2)$ . Все унитарные представления группы Лоренца,  $SU(3)$ , и других групп можно построить зная неприводимые представления  $SU(2)$ . В частности, в рамках теории поля это ведёт к классификации всех частиц на бозоны и фермионы.

Как видно, значимость группы  $SU(2)$  сложно переоценить.

### 4.1 Конечномерные представления $ASU(2)$

Оказывается возможным найти все конечномерные неприводимые представления группы  $ASU(2)$ . Это означает, что можно найти все конечномерные пространства  $V$ , на котором она может действовать, и соответствующее действие  $ASU(2)$  на  $V$ . Решим данную задачу.

Пусть  $V$  — некоторое возможное пространство неприводимого представления  $ASU(2)$  с базисными векторами  $|n\rangle$ . В общем случае  $V$  является комплексным пространством и его размерность заранее неизвестна. На  $V$  действуют операторы  $T$ , образующие некоторое представление  $ASU(2)$ . Пусть  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , образуют базис в  $ASU(2)$ , и обозначим  $T_i \equiv T(A_i)$ . Из линейной алгебры известно следующее утверждение:

*Утверждение 4.1* Пусть  $\{T_j\}$  — некоторый набор коммутирующих операторов на векторном пространстве  $V$ . Тогда в  $V$  существует базис, в котором все  $T_j$  одновременно диагональны.

Если оператор диагонален, то базисные вектора являются его собственными векторами. Это означает, что все базисные вектора можно однозначно характеризовать через их собственные числа под действием диагональных операторов. Применим данную стратегию для нахождения базиса в  $V$ .

Поскольку  $T$  является представлением  $ASU(2)$ , коммутационные соотношения операторов совпадают с коммутационными соотношениями алгебры:

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k, \quad (4.1)$$

где мнимая единица введена из соображений удобства. Видно, что коммутирующих операторов нет, и потому можно диагонализировать только один из них. Выбор конкретного диагонализуемого оператора не важен, и, традиционно, в качестве такового принято выбирать  $T_3$ . Тогда любой базисный вектор можно характеризовать через пару чисел

$$|m, \alpha\rangle, \quad (4.2)$$

где  $m$  является собственным числом для оператора  $T_3$ , соответствующему данному базисному вектору, а дополнительный параметр  $\alpha$  учитывает тот факт, что несколько базисных векторов могут иметь одно и тоже собственное число. Таким образом для базисных векторов имеем:

$$T_3 |m, \alpha\rangle = m |m, \alpha\rangle. \quad (4.3)$$

Положим, по определению, базисные вектора нормированными на единицу, и потребуем, чтобы различные базисные вектора были ортогональны:

$$\langle m, \beta | m, \alpha \rangle = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.4)$$

Введём так называемые повышающие и понижающие операторы  $T^\pm$ :

$$T^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 \pm iT_2). \quad (4.5)$$

В терминах  $T^\pm$ ,  $T_3$  коммутационные соотношения операторов принимают вид

$$[T_3, T^\pm] = \pm T^\pm, \quad [T^+, T^-] = T_3. \quad (4.6)$$

Чтобы понять почему  $T^+$  называется повышающим оператором, подействуем им на произвольный базисный вектор и рассмотрим действие  $T_3$  на результирующий вектор:

$$T_3(T^+ |m, \alpha\rangle) = T^+ T_3 |m, \alpha\rangle + T^+ |m, \alpha\rangle = (m + 1)T^+ |m, \alpha\rangle, \quad (4.7)$$

где мы воспользовались коммутационными соотношениями и тем, что  $|m, \alpha\rangle$  является собственным вектором оператора  $T_3$ . Видно, что  $(T^+ |m, \alpha\rangle)$  является собственным вектором оператора  $T_3$  с собственным значением  $m + 1$ . Но это означает, что  $T^+ |m, \alpha\rangle$  является ничем иным как базисным вектором  $|m + 1, \alpha\rangle$  с точностью до числового фактора:

$$T^+ |m, \alpha\rangle = N_m(\alpha) |m + 1, \alpha\rangle. \quad (4.8)$$

Аналогично можно показать, что действие  $T^-$  на  $|m, \alpha\rangle$  даёт, с точностью до множителя, вектор  $|m - 1, \alpha\rangle$ .

Для построения всего пространства  $V$  начнём с некоторого базисного вектора  $|m, \alpha\rangle$  и будем действовать на него повышающим оператором пока не получим 0. Это должно когда-то произойти, поскольку иначе пространство представления было бы бесконечномерным, что противоречит изначальному предположению. Следовательно,

$$\exists j : T^+ |j, \alpha\rangle = 0 . \quad (4.9)$$

Значение  $j$  называется наивысшим весом. Будем теперь действовать на данный вектор оператором  $T^-$ , чтобы получить все вектора из  $V$ . Как установлено выше,

$$T^- |j, \alpha\rangle = N_j(\alpha) |j - 1, \alpha\rangle , \quad (4.10)$$

где  $N_j$  — некоторый нормировочный множитель. Найдём значение  $N_j$  исходя из требования ортогональности (4.4). С одной стороны,

$$\langle j, \beta | T^+ T^- |j, \alpha\rangle = N_j^*(\beta) N_j(\alpha) \langle j - 1, \beta | j - 1, \alpha\rangle = N_j^*(\beta) N_j(\alpha) . \quad (4.11)$$

С другой стороны, используя коммутационные соотношения, можно получить

$$\langle j, \beta | T^+ T^- |j, \alpha\rangle = \langle j, \beta | [T^+, T^-] |j, \alpha\rangle = \langle j, \beta | T_3 |j, \alpha\rangle = j \delta_{\alpha\beta} . \quad (4.12)$$

Сравнение двух выражений приводит к условию

$$N_j^*(\beta) N_j(\alpha) = j \delta_{\alpha\beta} \quad (4.13)$$

Заметим, что  $N_j$  не зависит от  $\alpha$ . Выберем базисный вектор  $|j - 1, \alpha\rangle$  так, чтобы  $N_j$  был действительным числом:

$$N_j = \sqrt{j} . \quad (4.14)$$

Покажем теперь, что оператор  $T^+$  является обратным к  $T^-$  с точностью до числового множителя. Иначе говоря, покажем, что действие  $T^+$  на  $|j - 1, \alpha\rangle$  даёт, с точностью до множителя,  $|j, \alpha\rangle$ :

$$T^+ |j - 1, \alpha\rangle = \frac{1}{N_j} T^+ T^- |j, \alpha\rangle = \frac{1}{N_j} [T^+, T^-] |j, \alpha\rangle = \frac{1}{N_j} T_3 |j, \alpha\rangle = N_j |j, \alpha\rangle . \quad (4.15)$$

Нетривиальность этого утверждения состоит в том, что мы могли получить вектор с собственным числом  $j$ , но иным  $\alpha$ . Однако уравнение выше показывает, что это не так.

Можно далее подействовать оператором  $T^-$  на  $|j - 1, \alpha\rangle$ , чтобы получить следующий вектор из пространства  $V$ . Делая так  $k$  раз получим

$$T^- |j - k, \alpha\rangle = N_{j-k} |j - k - 1, \alpha\rangle , \quad (4.16)$$

где  $N_{j-k}$  — некоторый числовой множитель. Проводя вычисления, аналогичные сделанным выше, можно убедиться, что применение повышающего оператора не изменяет значение  $\alpha$ , а требования ортогональности фиксирует  $N_{j-k}$  следующим образом:

$$N_{j-k} = \sqrt{\frac{1}{2}(k+1)(2j-k)}. \quad (4.17)$$

Задача 4.1. Доказать последнюю формулу.

На каком-то шаге применения понижающего оператора должен получиться 0, поскольку иначе представление не будет конечномерным. Поэтому

$$\exists l \in \mathbb{N} : T^- |j-l, \alpha\rangle = 0 \Leftrightarrow N_{j-l} = \sqrt{\frac{1}{2}(l+1)(2j-l)} = 0. \quad (4.18)$$

Последнее требование выполнено только тогда, когда  $j$  является полуцелым числом:

$$j = \frac{l}{2}. \quad (4.19)$$

Заметим, наконец, что действие  $T^+$  и  $T^-$  не меняет значение  $\alpha$ . Это означает, что пространство представления разбивается на подпространства с различными значениями  $\alpha$ , каждое из которых является инвариантным пространством. Поэтому для неприводимых представлений индекс  $\alpha$  можно опустить.

Получившееся пространство неприводимого представления  $ASU(2)$  можно представить в более удобной форме следующим образом. Вместо индекса  $k$  в предыдущих формулах введём новый,  $m = j - k$ , непосредственно соответствующий собственному числу оператора  $T_3$ . Тогда базисом в  $V$  является набор  $2j + 1$  векторов вида

$$|m, j\rangle, \quad m = j, j-1, \dots, -j+1, -j. \quad (4.20)$$

Таким образом, собственные значения оператора  $T_3$  принимают значения от  $-j$  до  $j$  с единичным шагом, в то время как само  $j$  может принимать полуцелое значение. Задание  $j$  однозначно фиксирует пространство неприводимого представления  $ASU(2)$ .

- <sub>4.1</sub> Приведенная процедура построения пространства представления  $ASU(2)$  называется построением наивысшего веса.
- <sub>4.2</sub> Значение наивысшего собственного значения оператора  $T_3$ ,  $j$ , называется спином. Собственное значение оператора  $T_3$  для заданного состояния,  $m$ , называется проекцией спина.

Суммирую всё вышесказанное, мы показали следующее:

Все неприводимые представления  $ASU(2)$  однозначно характеризуются значением наивысшего собственного веса,  $j = \frac{n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , называемого спином. Пространство представления  $ASU(2)$  спина  $j$  состоит из  $2j + 1$  векторов с проекциями спина, меняющимся с единичным шагом.

Вообще говоря, изложенная процедура построения конечномерных неприводимых представлений  $ASU(2)$  не гарантирует, что она покрывает всевозможные конечномерные представления. Однако, более строгое построение показывает, что это действительно так.

На практике для построения конечномерных представлений  $ASU(2)$  удобно использовать матричные элементы операторов. Их можно достаточно прямолинейно вывести напрямую расписывая действие операторов:

$$\langle m, j | T_3 | m', j \rangle = m \delta_{m, m'} \quad (4.21)$$

$$\langle m, j | T^\pm | m', j \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} \delta_{m, m' \pm 1}. \quad (4.22)$$

Задача 4.2. Доказать формулы (4.21), (4.22).

**Пример 4.1.** В качестве иллюстрации подхода построим спин- $\frac{1}{2}$  представление  $ASU(2)$ . Поскольку  $j = \frac{1}{2}$ , имеется всего 2 базисных вектора,  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  и  $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ . Выберем для них базисные вектора следующим образом:

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Для оператора  $T_3^{\frac{1}{2}}$  мы должны иметь

$$T_3^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad T_3^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (4.24)$$

Это однозначно фиксирует  $T_3^{\frac{1}{2}}$ :

$$T_3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Данную матрицу можно также напрямую получить из выражения (4.21).

Вид  $T_{\frac{1}{2}}^\pm$  легче всего получить напрямую из матричных элементов (4.22):

$$T_{\frac{1}{2}}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Можно убедиться, что, например,  $T^+$  действительно действует как повышающий оператор:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Задача 4.3. Построить спин-1 представление  $ASU(2)$ . Показать, что оно эквивалентно присоединённому представлению.

Группа  $SO(3)$ , действующая как вращение координат, является симметрией квантовой механики. Следовательно, все рассматриваемые в ней объекты можно проклассифицировать в соответствии с тем, по какому её неприводимому представлению они преобразуются. Это означает, что любой объект, сам по себе, может иметь нетривиальный закон преобразования при действии  $ASO(3)$ , характеризующиеся значением спина данного объекта. Так экспериментально установлено, что электроны являются частицами со спином  $\frac{1}{2}$ , то есть, являются двухкомпонентными функциями.

Следует подчеркнуть, что данное понятие спина, вообще говоря, отличается от понятия спина, используемого в квантовой теории поля. Разница между квантовой механикой и квантовой теорией поля заключается в том, что во второй симметрией является не  $SO(3)$ , а группа Лоренца,  $SO(1, 3)$ . Соответственно, в квантовой теории поля все частицы характеризуются по неприводимым представлениям группы Лоренца. Представления  $SO(1, 3)$  и  $SU(2)$  связаны, но их необходимо различать. Однако, электрон в квантовой теории поля также имеет спин  $\frac{1}{2}$ .

## 4.2 Квантовые числа

Выше мы построили представления  $ASU(2)$  найдя максимальный набор коммутирующих операторов. При этом каждый элемент базиса однозначно характеризовался через собственные значения этих операторов. Обобщение данной процедуры лежит в основе описания состояний систем в любой области физики.

Рассмотрим, например, квантовую механику в более широком контексте. Один из её постулатов гласит, что пространство состояний системы — это гильбертово пространство (то есть, линейное пространство, не более чем счетной размерности, с введённым понятием скалярного произведения). Это означает, что существует не более, чем счетное количество возможных состояний внутри системы. На гильбертовом пространстве действуют операторы, одним из которых, например, является гамильтониан, соответствующий энергии системы. Из всего набора операторов можно найти максимальный набор коммутирующих операторов. В базисе, где они диагональны, базисные вектора однозначно характеризуются собственными числами диагональных операторов.

Чтобы формализовать эту процедуру в общем случае вводят следующее понятие:

- <sub>4.3</sub> Алгеброй Картана называется максимальный набор взаимно коммутирующих элементов некоторой алгебры.

Множество операторов можно рассматривать как алгебру Ли с обычными операциями сложения операторов и умножения на число, и хорошо определенной операцией коммута-

ции. Действительно, если  $A$  и  $B$  являются некоторыми операторами, то и  $[A, B] = AB - BA$  тоже. Поэтому понятие алгебры Картана применимо и для пространства операторов. Пусть  $A_1, \dots, A_k$  образуют базис в алгебре Картана. Тогда, как говорилось ранее, их можно одновременно диагонализировать. Соответственно, произвольный базисный вектор характеризуется набором чисел

$$|n_1, \dots, n_k, \alpha\rangle, \quad (4.28)$$

где  $n_1, \dots, n_k$  являются собственными числами операторов  $A_1, \dots, A_k$  соответственно, а дополнительный индекс  $\alpha$ , возможно многомерный, необходим, если базисных векторов с собственными числами  $n_1, \dots, n_k$  несколько. В квантовой механике набор чисел  $n_1, \dots, n_k$  называется квантовыми числами.

**Пример 4.2.** Как известно, электрон в атоме водорода может находиться только на определённых орбиталях, количество которых, вообще говоря, счётно. При этом каждая орбиталь однозначно характеризуется набором квантовых чисел вида

$$|n, l, m_l, m_s\rangle, \quad (4.29)$$

где  $n$  характеризует уровень энергии,  $l$  и  $m_l$  — это значение углового момента электрона и его проекция на одну из осей, и  $m_s$  — значение проекции спина. Они находятся во взаимно однозначном соответствии с собственными значениями операторов гамильтониана, полного углового момента и его проекции, и спина соответственно.

Для наиболее полной характеристики состояния системы оказывается необходимым понятие операторов Казимира и обёртывающей алгебры:

○<sub>4.4</sub> Пусть  $A = \{A_i\}$  — некоторая алгебра Ли. Обёртывающей алгеброй  $\mathcal{U}(A)$  алгебры  $A$  называется множество элементов вида  $\{A_{a_1} \otimes A_{a_2} \otimes \dots \otimes A_{a_i}\}$ , где  $i$  принимает всевозможные целые неотрицательные значения, а  $a_1, \dots, a_i$  — всевозможные перестановки  $i$  чисел. При этом умножение и сложение в  $\mathcal{U}$  определено естественным образом, например,

$$(A_{i_1} \otimes \dots \otimes A_{i_k}) \otimes (A_{j_1} \otimes \dots \otimes A_{j_l}) = A_{i_1} \otimes \dots \otimes A_{i_k} \otimes A_{j_1} \otimes \dots \otimes A_{j_l}. \quad (4.30)$$

Также в  $\mathcal{U}(A)$  определён закон коммутации:

$$A_1 \otimes A_2 - A_2 \otimes A_1 = [A_1, A_2], \quad (4.31)$$

где в правой части понимается коммутация как операция в алгебре Ли  $A$ .

Проще говоря, обертывающая алгебра — это множество всевозможных произведений элементов алгебры с собой и перенесённым законом коммутации элементов.

**Пример 4.3.** В квантовой механике есть три независимых оператора – координаты, импульса и спина. Все остальные — это элементы обёртывающей алгебры данных трёх операторов. Например, оператор углового момента,

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (4.32)$$

где  $\times$  означает векторное произведение, является элементом обёртывающей алгебры второго порядка.

○<sub>4.5</sub> Операторами Казимира называется элемента центра  $\mathcal{U}(A)$ .

Поскольку операторы Казимира образуют центр обёртывающей алгебры, то они коммутируют также со всеми элементами алгебры. Поэтому их можно диагонализировать одновременно со всеми элементами алгебры Картана.

**Пример 4.4.** Квантовое число  $l$ , характеризующее значение углового момента электрона в алгебре, на самом деле связано с собственным числом квадратичного оператором Казимира — квадрата углового момента  $M^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ .

Задача 4.4. Показать, что  $J^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2$  является квадратичным оператором Казимира для обёртывающей алгебры  $SU(2)$ . Найти его значение на элементах неприводимого представления спина- $j$ .

Таким образом, полный набор квантовых чисел произвольной системы состоит из собственных значений операторов из алгебры Картана и операторов Казимира. Хотя обёртывающийся алгебра содержит всевозможные степени операторов, на практике оказывается достаточным ограничиться операторами Казимира второго порядка.

Для демонстрации свойств операторов Казимира нам потребуется доказать лемму Шуру, которая состоит из двух частей.

*Утверждение 4.2 Лемма Шура 1.* Пусть  $T_1, T_2$  — два неэквивалентных неприводимых представления группы  $G$ , действующих в пространстве  $V$ . Тогда если для некоторого линейного оператора  $A$  выполняется

$$\forall g \in G \Leftrightarrow T_1(g)A = AT_2(g), \quad (4.33)$$

то  $A = 0$ .

▽ Докажем утверждение от противного: пусть  $A \neq 0$ . Пусть  $M = \{|\mu\rangle\}$  — множество векторов, которые отображаются оператором  $A$  в ноль. Предположим сначала, что  $M \neq \emptyset$ . Поскольку  $M$  — векторное пространство, то существует проектор  $P$ , выделяющий из  $V$  подпространство  $M$ . Тогда из условия леммы имеем

$$AT_2(g)P = T_1AP \equiv 0. \quad (4.34)$$



Это означает, что  $M$  является инвариантным подпространством представления  $T_2$ . Но, по условию,  $T_2$  является неприводимым представлением, и потому  $P$  может быть только единичной матрицей. Следовательно, если  $A$  отображает в ноль хотя бы один вектор, то он обязан отображать в ноль все вектора. Это означает, что  $A = 0$ .

Предположим теперь, что  $M = \emptyset$ . В этом случае  $A$  обязано быть невырожденной квадратной матрицей. Но тогда из условия леммы следует, что представления  $T_1$  и  $T_2$  эквивалентны:

$$T_2(g) = A^{-1}T_1A . \quad (4.35)$$

Получаем противоречие, доказывающее утверждение леммы.  $\triangle$

*Утверждение 4.3 Лемма Шура 2.* Пусть  $T$  — некоторое неприводимое представление группы  $G$ , действующих в пространстве  $V$ . Тогда если линейный оператор  $A$  коммутирует с  $T$ , то  $A$  пропорционален единичной матрице:

$$\forall g \in G \leftrightarrow T(g)A = AT(g) \Rightarrow A \sim E . \quad (4.36)$$

$\nabla$  Случай  $A = 0$  не представляет интереса, и потому не будет рассмотрен. Тогда, если  $A \neq 0$ , у  $A$  есть хотя бы один собственный вектор  $|\mu\rangle$  с некоторым собственным числом  $\lambda$ :

$$(A - \lambda E)|\mu\rangle = 0 . \quad (4.37)$$

Если  $\tilde{A} \equiv A - \lambda E \neq 0$ , то для оператора  $\tilde{A}$  применимы рассуждения первого параграфа доказательства первой части леммы Шура с заменой  $T_1, T_2$  на  $T$ . Как следствие,  $\tilde{A} = 0$ , что доказывает вторую часть леммы Шура.  $\triangle$

*Следствие 1.* Поскольку оператор Казимира удовлетворяет условиям второй части леммы Шура, то на неприводимых представлениях он пропорционален единичной матрице. Поэтому соответствующее ему собственное число одинаково для всех элементов неприводимого представления.

*Задача 4.5.* Убедиться, что собственные числа квадратичного оператора Казимира  $J^2$  состояний  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  и  $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  совпадают.

*Следствие 2.* Пусть  $G$  — компактная группа, являющаяся симметрией некоторой системы  $V$ . Поскольку  $G$  компактна, то все её представления эквивалентны унитарному, и потому полностью приводимы. Тогда произвольной базисный вектор  $V$  представим в виде

$$|a, m, \alpha\rangle , \quad (4.38)$$

где  $a$  задаёт неприводимое представление (через значение оператора Казимира на нём),  $m$  нумерует элементы внутри неприводимого представления, и индекс  $\alpha$  необходим, если одно и тоже неприводимое представление встречается несколько раз.

**Пример 4.5.** Базисные вектора неприводимых конечномерных представлений  $ASU(2)$  однозначно характеризуется парой чисел

$$|m, j\rangle, \quad (4.39)$$

где  $j$  соответствует спину и однозначно связан со значением квадратичного оператора Казимира  $J^2$ , а  $m$  задаёт проекцию спина на заданную ось.

**Пример 4.6.** В специальной теории относительности симметрией является группа Пуанкаре, состоящая из трансляций координат и преобразований Лоренца. Допустим, мы рассматриваем некоторую частицу. Тогда, в соответствии с описанной логикой, она должна однозначно характеризоваться значением операторов Казимира и заданием элемента внутри соответствующего неприводимого представления. Это действительно так: неприводимые представления группы Пуанкаре однозначно характеризуются заданием массы (квадратичного оператора Казимира, соответствующего сдвигам) и квадрата спина. “Внутри” каждого из этих неприводимых представлений каждая частица характеризуется значением импульса и проекцией спина соответственно. Таким образом, состояние

$$|m^2, p_\mu, j, m\rangle \quad (4.40)$$

однозначно задаёт состояние частицы в специальной теории относительности.

### 4.3 Выделение неприводимых представлений

Вернёмся к обсуждению представлений  $ASU(2)$ . На практике системы, состоящие только из одной частицы, являются исключением. Чаще всего система состоит из нескольких частиц, на каждую из которых действует своё представление  $ASU(2)$ . Простейший пример подобной системы — это атом гелия, в котором помимо ядра присутствует уже два электрона. Каждый из них преобразуется независимо под действием  $ASU(2)$ , а система как целое преобразуется как тензорное представление соответствующих представлений. Однако, такое представление является приводимым и его можно разбить на неприводимые компоненты. Обсудим соответствующую процедуру и покажем в чём состоит её польза.

Для решения этой задачи необходимо предварительно понять как действует  $ASU(2)$  на пространстве тензорного произведения состояний. Рассмотрим этот вопрос в общем случае. А именно, пусть  $AG$  действует на пространствах  $V_1$  и  $V_2$  представлениями  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. Обозначим также через  $T^\times$  действие тензорного произведения представлений  $T_1$  и  $T_2$  в пространстве тензорного произведения пространств  $V_1$  и  $V_2$ . Тогда, поскольку для малых  $\epsilon$  выражение  $1 + \epsilon T^\times(A)$ ,  $A \in AG$ , является элементом группы, то по определению тензорного произведения представления групп имеем

$$(1 + \epsilon T^\times) |\psi_1, \psi_2\rangle = (1 + \epsilon T_1) |\psi_1\rangle \otimes (1 + \epsilon T_2) |\psi_2\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle + \epsilon (|T_1 \psi_1, \psi_2\rangle + |\psi_1, T_2 \psi_2\rangle). \quad (4.41)$$

Из данной цепочки равенств следует

$$T^\times |\psi_1, \psi_2\rangle = |T_1\psi_1, \psi_2\rangle + |\psi_1, T_2\psi_2\rangle , \quad (4.42)$$

что и определяет действие тензорного произведения представлений алгебры в пространстве  $V_1 \otimes V_2$  через её действие на каждом из подпространств. Пусть индексы  $a, b$  и  $i, j$  нумеруют компоненты векторов в пространствах  $V_1$  и  $V_2$  соответственно. Тогда для матричных элементов имеет место соотношение

$$T_{(ai)(bj)} = T_{1ab}\delta_{ij} + T_{2ij}\delta_{ab} . \quad (4.43)$$

Часто дельта символ в данном выражении опускается, поскольку из контекста всегда можно понять на какую часть пространства действует та или иная компонента тензорного произведения представлений.

Нас будет интересовать случай выделения неприводимых представлений из тензорного произведения представлений  $ASU(2)$ . Мы уже знаем как выглядят конечномерные неприводимые представления  $ASU(2)$  — они задаются значением наибольшего веса  $T_3$ , а все остальные состояния получаются путем действия понижающего оператора. Поэтому для выделения неприводимых представлений из пространства тензорного произведения представлений можно применить следующую процедуру:

1. Найти состояние с наивысшим весом.
2. Найти все состояния, получающиеся из него действием понижающего оператора.
3. Выделить из пространства представления подпространство  $\tilde{V}$ , ортогональное к линейной оболочке полученных состояний. Состояния из  $\tilde{V}$  не покрываются построенным неприводимым представлением.
4. Повторять пункты 1-3 пока  $\tilde{V}$  не окажется пустым множеством.

При этом все генераторы действуют на рассматриваемом пространстве в соответствии с формулой (4.42). В результате применения данной процедуры все состояния будут идентифицированы как состояния внутри неприводимых представлений  $ASU(2)$ .

**Пример 4.7.** Для иллюстрации метода разложим тензорное произведение спин- $\frac{1}{2}$  и спин-1 представлений на неприводимые компоненты. Пространство представления в этом случае состоит из векторов вида

$$\left| m_1, \frac{1}{2}; m_2, 1 \right\rangle , \quad (4.44)$$

где  $m_1 = \pm\frac{1}{2}$ ,  $m_2 = 1, 0, -1$ . При этом для действия  $T_3$  из формулы (4.42) имеем

$$T_3 \left| m_1, \frac{1}{2}; m_2, 1 \right\rangle = (m_1 + m_2) \left| m_1, \frac{1}{2}; m_2, 1 \right\rangle . \quad (4.45)$$

То есть, значение проекции спина тензорного произведения состояний есть сумма проекций спина каждого из состояний. В связи с этим говорят, что проекция спина аддитивна. Установив данное свойство, легко найти состояние с наивысшим значением  $T_3$ , которым является

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 \right\rangle : T_3 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1 \right\rangle = \frac{3}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1 \right\rangle . \quad (4.46)$$

Можно убедиться, что применение повышающего оператора к данному состоянию даёт ноль. Поэтому найденное состояние действительно является состоянием с наивысшим весом спин- $\frac{3}{2}$  представления  $ASU(2)$ :

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1 \right\rangle = \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle . \quad (4.47)$$

Применяя понижающий оператор к данному состоянию, пока не получится ноль, можно получить все базисные вектора спин- $\frac{3}{2}$  представления и идентифицировать их со состояниями из тензорного произведения представлений.

Применим  $T^-$  первый раз. С одной стороны, можно использовать действие  $T^-$  внутри неприводимого представления, формула (4.10):

$$T^- \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \left| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle . \quad (4.48)$$

С другой стороны, используя формулу для действия тензорного произведения представлений алгебры, ур. (4.42), получим

$$T^- \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1 \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, 1 \right\rangle . \quad (4.49)$$

Приравнивая эти два выражения, имеем

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, 1 \right\rangle . \quad (4.50)$$

Данное уравнение выражает состояние  $\left| \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$  в неприводимом представлении спин- $\frac{3}{2}$  через изначальные. Действуя на полученное состояние аналогичным образом понижающим оператором можно получить состояния

$$\left| -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -1, 1 \right\rangle , \quad (4.51)$$

$$\left| -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -1, 1 \right\rangle . \quad (4.52)$$

Четыре полученных вектора формируют базис в спин- $\frac{3}{2}$  представление  $ASU(2)$ .

На этом процедура выделения неприводимых представлений не заканчивается — из изначального шестимерного пространства было выделено только четырехмерное подпространство спин- $\frac{3}{2}$  представления  $ASU(2)$ . Соответственно, необходимо также выделить неприводимые представления из оставшегося двухмерного пространства, являющегося ортогональным дополнением к полученному спин- $\frac{3}{2}$  представлению. Требование ортогональности пространств фиксирует базис в оставшемся подпространстве:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 0 \right\rangle, \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, 1 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, -1 \right\rangle. \quad (4.53)$$

Из данных двух векторов первое имеет наибольшее собственное число оператора  $T_3$ ,  $\frac{1}{2}$ . Следовательно, оно является наивысшим состоянием в спин- $\frac{1}{2}$  представлении  $ASU(2)$ ,

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 0 \right\rangle. \quad (4.54)$$

Действие на него понижающим оператором даёт второй базисный вектор спин- $\frac{1}{2}$  представления,

$$\left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, 1 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, -1 \right\rangle. \quad (4.55)$$

Как видно, он совпадает с оставшимся базисным вектором в формуле (4.53). Следовательно, пространство спин- $\frac{1}{2}$  представления полностью охватывает оставшееся после предыдущего шага непокрытым подпространство. Таким образом, на данном этапе процедура выделения неприводимых представлений закончена — все состояния из тензорного произведения представлений могут быть представлены через состояния неприводимых представлений  $ASU(2)$ .

Неприводимые представления  $ASU(2)$  однозначно характеризуются их размерностью. В этих терминах выше было показано, что

$$2 \otimes 3 = 4 \oplus 2. \quad (4.56)$$

С геометрической точки зрения изложенная процедура сводится к замене базиса. Однако благодаря этому получилось выделить два независимых подпространства, каждое из которых преобразуется по своему неприводимому представлению  $ASU(2)$ . В силу этого элементы данных подпространств не могут перемешиваться не при каких операциях над состояниями, в том числе при временной эволюции системы. А это позволяет свести рассмотрение шестимерного пространства к независимым четырех- и двух-мерным пространствам, что заметно проще.

Задача 4.6. Показать, что для тензорного произведения спин- $k$  и спин- $l$  справедливо равенство

$$(2k + 1) \otimes (2l + 1) = \oplus \sum_{j=|k-l|}^{k+l} (2j + 1). \quad (4.57)$$

На практике задача разложения тензорного произведения представлений на неприводимые компоненты встречается достаточно часто. Чтобы не проделывать одни и те же вычисления каждый раз, введено понятие коэффициентов Клебши-Гордана. А именно, для произвольных спин- $k$  и спин- $l$  представлений можно записать

$$|m_j, j; m_l, l\rangle = \sum_{k, m_k} C_{k, m_k}^{j, l} |m_k, k\rangle . \quad (4.58)$$

○<sub>4.6</sub> Коэффициенты  $C_{k, m_k}^{j, l}$  называются коэффициентами Клебши-Гордана.

Коэффициенты Клебши-Гордана посчитаны для большого числа случаев и могут быть найдены в справочниках.

## 4.4 Собственные функции

Можно использовать представления  $ASO(3)$  для классификации функций на  $\mathbb{R}^3$ . А именно, можно построить представления  $ASO(3)$  в виде дифференциальных операторов и найти их собственные функции. Как будет показано, это позволяет разложить произвольную функцию на собственные функции  $ASO(3)$ .

Найдем сначала реализацию  $ASO(3)$  в виде дифференциальных операторов. Для этого заметим сначала, что в трехмерном пространстве группа  $SO(3)$  действует как вращение координат. Чтобы найти соответствующее представление  $ASO(3)$ , рассмотрим бесконечно малое вращение вокруг оси  $k$  на угол  $\varphi$ :

$$\tilde{x}_m = (\Lambda_{(k)})_{ml} x_l = x_m + \varphi (L_{(k)})_{ml} x_l . \quad (4.59)$$

Здесь  $\Lambda_{(k)}$  — это матрица поворота вокруг  $k$ -ой оси, а  $L_{(k)}$  — соответствующий генератор. Оказывается удобным обозначать ось не напрямую, а через направления, которым она перпендикулярна:  $k \rightarrow ij$ , где  $ij$  — номера соответствующих осей. При этом считается, что  $kij$  является чётной перестановкой чисел 123, то есть получается из последнего четным числом попарных перестановок чисел. Тогда, воспользовавшись явным видом матриц поворота можно показать, что

$$(L_{(ij)})_{ml} = \delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm} . \quad (4.60)$$

Данное выражение задаёт представление  $ASO(3)$  как генераторов вращений. Можно убедиться, что, как требуется, оно действительно удовлетворит коммутационным соотношениям алгебры  $SO(3)$ .

Задача 4.7. Доказать выражение (4.60).

Комбинируя две последние формулы получаем, что при поворотах координаты смещаются на величину

$$\varphi (L_{(ij)})_{ml} x_l = \varphi (\delta_{im}x_j - \delta_{jm}x_i) . \quad (4.61)$$

Это позволяет представить генераторы вращений в виде дифференциальных операторов:

$$\hat{L}_{ij} = x_i \partial_j - x_j \partial_i = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (4.62)$$

и переписать поворот (4.59) в более простой форме:

$$x_m = x_m + \hat{L}_{ml} x_l. \quad (4.63)$$

Легко убедиться, что выражения (4.62) удовлетворяют коммутационным соотношениям  $ASO(3)$ , и потому действительно являются некоторым её представлением.

Дифференциальное представление алгебры  $SO(3)$  действует на пространстве функций. Из данного пространства можно выделить функции, принадлежащие разным представлениям  $ASO(3)$ , и, тем самым, разбить все функции на непересекающиеся классы. В отличие от абстрактных состояний, рассматриваемых ранее, их можно найти в явном виде, то есть, как известные функции координат. Как мы знаем, каждый класс подобных функций должен характеризоваться двумя числами — собственными числами операторов  $L^2$  (оператор Казимира) и проекций на одну из осей (значение  $L_3$  из алгебры Картана).

Начнём построение с нахождения собственных функций  $L^2$ . Это удобнее всего сделать в сферических координатах, в которых соответствующее уравнение принимает вид

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y = \lambda Y, \quad (4.64)$$

где  $\theta$ ,  $\varphi$  — азимутальный и полярный углы соответственно, а  $Y(\theta, \varphi)$  — искомая функция. Найдём решения данного уравнения методом разделения переменных:

$$Y(\theta, \varphi) = O(\theta) \Phi(\varphi), \quad (4.65)$$

где  $O(\theta)$  и  $\Phi(\varphi)$  — некоторые функции. После тривиальных преобразований изначальное уравнение можно привести к виду

$$\left( \lambda \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{O} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial O}{\partial \theta} \right) \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4.66)$$

Выражение, стоящее в скобках, является функцией только  $\theta$ , в то время как оставшаяся часть — функция  $\varphi$ . В сумме они могут давать ноль только в том случае, когда каждая из составляющих равна некоторому числу, причем они противоположным по знаку. Таким образом мы получаем систему из уравнений

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi, \quad (4.67)$$

$$\lambda \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{O} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial O}{\partial \theta} \right) = m^2, \quad (4.68)$$

для некоторого  $m^2$ . Из первого уравнения следует, что

$$\Phi = e^{\pm im\varphi} . \quad (4.69)$$

Поскольку при повороте на  $2\pi$  функция должна переходить сама в себя, то  $m$  может быть только натуральным числом,

$$m \in \mathbb{N} . \quad (4.70)$$

Для нахождения возможных значений  $\lambda$  заметим сначала, что поскольку

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 , \quad (4.71)$$

а  $m^2$  является собственным значением  $L_z^2$ , то

$$\lambda \geq m^2 . \quad (4.72)$$

Введём далее понижающие и повышающие операторы,

$$L_{\pm} = L_x \pm L_y . \quad (4.73)$$

Дословно повторяя шаги при введении понижающих и повышающих операторов при построении конечномерных представлений  $ASU(2)$  можно показать, что  $L_{\pm}$  повышают и понижают значение  $m$  на единицу. Однако, в силу соотношения (4.72), невозможно бесконечно повышать значение  $m$ . Это означает, что

$$\exists k \in \mathbb{N} : (L_+)^{k+1} Y = 0 . \quad (4.74)$$

Для рассмотрения данного уравнения удобно воспользоваться соотношением

$$L_- L_+ = L^2 - L_z^2 - L_z . \quad (4.75)$$

Тогда умножая уравнение (4.74) на  $L_-$  получим

$$(\lambda - (m+k)^2 - (m+k)) Y = 0 . \quad (4.76)$$

Поскольку  $Y \neq 0$ , то должно выполняться

$$\lambda = l(l+1) , \quad l \equiv m+k . \quad (4.77)$$

Таким образом, произвольную функцию  $Y(\theta, \varphi)$  можно однозначно задать с помощью пары чисел  $\lambda$  и  $m$ ,  $Y_{\lambda m}$ . При этом должно выполняться

$$\lambda = l(l+1) , \quad m^2 \leq \lambda , \quad m, l \in \mathbb{N} . \quad (4.78)$$

○<sub>4.7</sub> Функции  $Y_{\lambda m}$  называются сферическими функциями.



В отличие от  $\Phi$ , решить уравнения на  $O$  оказывается сложнее. Однако, для произвольных  $m$  и  $\lambda$  их явный вид известен и может быть найден в справочниках.

С точки зрения теории групп мы показали следующее. Вращение координат является симметрией на пространстве функций, поскольку является лишь переобозначением переменных. Соответственно, все функции можно классифицировать по неприводимым представлениям  $ASO(3)$ . Сферические функции образуют базис в этом пространстве, и потому произвольную функцию можно всегда разложить в сумму сферических функций.

**Пример 4.8.** *Применение сферических функций.* Угловая часть волновой функции электрона в атоме описывается сферическими функциями. Значения  $\lambda$  и  $m$  соответствуют квадрат углового момента и проекция углового момента на заданную ось. Не следует путать данные квантовые числа со значением спина электрона ( $1/2$ ) и проекцией спина на одну из осей.

## 5 Группа Пуанкаре

### 5.1 Структура группы Лоренца

Прежде чем вводить понятие группы Пуанкаре, изучим более детально структуру группы Лоренца и её представлений. По определению, это множество матриц  $O$ , оставляющих неизменной метрику Минковского  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ :

$$O_{\lambda\mu}\eta_{\lambda\rho}O_{\rho\nu} = \eta_{\mu\nu} . \quad (5.1)$$

Группа Лоренца  $O(1, 3)$  не является связной, то есть, из одного её элемента невозможно путём непрерывной деформации получить все остальные. Иначе говоря, на соответствующей ей многообразии произвольные две точки невозможно соединить линией. Причин тому две. Во-первых, матрицы из группы Лоренца могут иметь детерминант как равный  $+1$ , так и  $-1$ . Непрерывный переход между этими двумя классами матриц невозможен.

Чтобы увидеть вторую причину, рассмотрим 00 компоненту уравнения (5.1):

$$O_{00}^2 = 1 + O_{\lambda 0}O_{\lambda 0} . \quad (5.2)$$

Отсюда следует, что

$$O_{00} \geq 1 \quad \text{или} \quad O_{00} \leq -1 . \quad (5.3)$$

Непрерывный переход данными двумя классами матрицами из группы Лоренца невозможен в силу разрыва в возможных значениях  $O_{00}$ .

Из-за указанных особенностей группа Лоренца распадается на четыре не пересекающиеся компонент связности, обозначаемых в соответствии с нижеследующей таблицей:

$\det O \setminus O_{00}$	$\geq 1$	$\leq -1$	(5.4)
$+1$	$O_+^\uparrow$	$O_+^\downarrow$	
$-1$	$O_-^\uparrow$	$O_-^\downarrow$	

Из них образуют подгруппы  $O_+^\uparrow$  и  $O^\uparrow \equiv O_+^\uparrow \cup O_-^\uparrow$ .

○<sub>5.1</sub> Группы  $O^\uparrow$  и  $O_+^\uparrow$  называются ортохронной и собственной ортохронной группами Лоренца соответственно.

Группа Лоренца содержит также два дискретных преобразования:

1. Отражение пространственных координат:  $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .
2. Отражение направления времени:  $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .

Из явных выражений для  $P$  и  $T$  преобразований видно, что  $P \in O_-^\uparrow$ ,  $T \in O_-^\downarrow$ ,  $PT \in O_+^\downarrow$ , и они позволяют переходить между различными компонентами связности группы Лоренца. Благодаря этому оказывается возможным, например, получить произвольный элемент  $O_-^\uparrow$  комбинируя  $P$  преобразование с некоторым элементом из  $O_+^\uparrow$ . В силу этого группа Лоренца представима в виде объединения следующих множеств:

$$O(1, 3) = (O_+^\uparrow) \cup (O_+^\uparrow P) \cup (O_+^\uparrow T) \cup (O_+^\uparrow PT) . \quad (5.5)$$

В свою очередь это означает, что для изучения свойств группы Лоренца достаточно изучить свойства только собственной ортохронной подгруппы.

В соответствии со сказанным, ограничимся собственной ортохронной группой Лоренца. Для неё известно общее решение определяющего уравнения (5.1) — это всевозможные комбинации поворотов вокруг пространственных осей и бусты, смешивающие время и координаты. Выбирая координаты таким образом, что ось поворота совпадает с третьей осью, произвольный поворот записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (5.6)$$

Также в координатах, смешивающих время и только первую координату, произвольный буст принимает вид

$$\begin{pmatrix} \text{ch} \varphi & \text{sh} \varphi & 0 & 0 \\ \text{sh} \varphi & \text{ch} \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (5.7)$$

где  $\text{ch} \varphi$  и  $\text{sh} \varphi$  — это гиперболические косинус и синус соответственно.

## 5.2 Алгебра группы Лоренца

Найдём явный вид генераторов группы Лоренца. Раскладывая малый поворот вокруг оси  $i$  (положим для конкретности вокруг третьей оси), имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (5.8)$$

Заменяя индекс оси поворота на индексы осей, в плоскости которых происходит поворот, для генераторов можно записать

$$(J_{ij})_{kl} = \delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl} . \quad (5.9)$$

Поскольку комбинирую повороты вокруг каждой из пространственных осей можно получить произвольный поворот, выписанные генераторы действительно образуют базис в алгебре всевозможных пространственных поворотов.

Аналогично можно рассмотреть малый буст и разложить его:

$$\begin{pmatrix} \text{ch}\varphi & \text{sh}\varphi & 0 & 0 \\ \text{sh}\varphi & \text{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Таким образом, генераторы бустов имеют вид

$$(J_{0i})_{kl} \equiv (K_i)_{kl} = \delta_{0k}\delta_{il} + \delta_{0l}\delta_{ik}. \quad (5.11)$$

По той же логике, что и для поворотов, выписанные генераторы действительно образуют базис в алгебре всевозможных бустов.

Имея явный вид генераторов алгебры Лоренца можно легко найти коммутационные соотношения. В унифицированном виде их можно записать следующим образом:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\rho}] = \eta_{\nu\rho}J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho}J_{\nu\lambda} + \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\rho} - \eta_{\mu\lambda}J_{\nu\rho}. \quad (5.12)$$

Иногда на практике удобно выделять отдельно генераторы вращений и бустов, записывая коммутационные соотношения в виде

$$[J_i, J_j] = -\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = -\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = \epsilon_{ijk}J_k. \quad (5.13)$$

Подобный выбор обозначений подчеркивает тот факт, что пространственные вращения образуют подгруппу в группе Лоренца.

Наконец в алгебре Лоренца можно выделить базис, в котором она распадается на две подалгебры. А именно, если ввести генераторы

$$J_i^\pm \equiv \frac{1}{2}(J_i \pm iK_i), \quad (5.14)$$

то коммутационные соотношения принимают вид

$$[J_i^\pm, J_j^\pm] = -\epsilon_{ijk}J_k^\pm, \quad [J_i^+, J_j^-] = 0. \quad (5.15)$$

Каждая из подалгебр изоморфна  $ASO(3)$ , и потому

$$ASO(1,3) = ASO(3) \oplus ASO(3). \quad (5.16)$$

Выписанное соотношение качественно описывает структуру представлений алгебры Лоренца. А именно, поскольку алгебра Лоренца распалась на две подалгебры  $ASO(3)$ , то

представления  $ASO(1, 3)$  должны сводиться к паре представлений  $ASO(3)$ . А как выглядят последние уже было изучено ранее. Однако это утверждение не является строгим: переопределение базисных векторов, ур. (5.14), содержит мнимую единицу. Поэтому на самом деле имеет место изоморфизм между комплексификациями алгебр  $ASO(3)$  и  $ASO(3) \oplus ASO(3)$ . Тем не менее, ниже будет показано, что представления  $ASO(1, 3)$  действительно сводятся к паре представлений  $ASO(3)$ .

Задача 5.1. Показать, что  $ASO(4) = ASO(3) \oplus ASO(3)$ .

### 5.3 Тензора

Для рассмотрения объектов, преобразующихся по достаточно общим представлениям групп, оказывается полезным понятие тензора. Чтобы ввести его в общем случае, вспомним сначала, что если  $V$  — это некоторое векторное пространство, то для него можно ввести понятие дуального пространства  $V^*$ :

○<sub>5.2</sub> Пространством  $V^*$ , дуальным к  $V$ , называется пространство линейных функций из  $V$  в  $\mathbb{R}$ .

Из линейной алгебры известно, что  $V^*$  является векторным пространством такой же размерности, как  $V$

Задача 5.2. Доказать последнее утверждение.

Если  $V^*$  — векторное пространство, то в нём можно ввести базис. Выделяют так называемый дуальный базис:

○<sub>5.3</sub> Базисом в  $V^*$ , дуальным к базису  $e_i$  в  $V$ , называются линейные функции  $e^{*i}(V)$  такие, что

$$e^{*i}(e_j) = \delta_j^i. \quad (5.17)$$

Дуальный базис образует базис в пространстве  $V^*$  и для него удобно использовать верхние индексы для обозначения соответствующих компонент — это позволяет различать элементы пространств  $V$  и  $V^*$ . В дальнейшем верхний индекс будет использоваться для обозначения элементов  $V^*$ , а звёздочка будет опускаться.

Теперь все подготовлено к введению понятия тензора:

○<sub>5.4</sub> Пусть  $V$  — некоторое векторное пространство. Тогда тензором  $\psi$  ранга  $(r, q)$  называется элемент тензорного произведения  $r$  копий пространства  $V$  и  $q$  копий пространства  $V^*$ :

$$\psi \in \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_q. \quad (5.18)$$

В дальнейшем, для сокращения записей, пространство, получаемое как тензорное произведение  $n$  копий пространства  $V$  будет обозначаться как  $V^{\otimes r}$ .

Пусть  $e_i, e^j$  образуют базис в пространствах  $V$  и  $V^*$  соответственно, тогда для тензора ранга  $(r, q)$  можно записать

$$\psi = \psi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} . \quad (5.19)$$

○<sub>5.5</sub> Числа  $\psi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_r}$  называются компонентами тензора в заданном базисе.

Пусть на  $V$  действует некоторая матричная группа  $G$  по своему фундаментальному представлению. Тогда о матрицах представления  $G$  можно думать как о тензорах ранга  $(1, 1)$ , поскольку они отображают тензор ранга  $(1, 0)$  в  $(1, 0)$ . Соответственно, один индекс у матриц является верхним, а второй — нижним.

**Пример 5.1.** В специальной теории относительности  $x^\mu$  является тензором ранга  $(1, 0)$  при действии группы Лоренца как множества вращений пространства Минковского. Метрика Минковского является тензором ранга  $(0, 2)$ , поскольку отображает два вектора в число. Наконец, интервал является тензором ранга  $(0, 0)$ , поскольку не зависит от выбора базиса.

**Пример 5.2.** Можно рассматривать тензора для любых групп. Например, состояние

$$\left| m_1, \frac{1}{2}; m_2, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| m_1, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| m_2, \frac{1}{2} \right\rangle , \quad (5.20)$$

в пространстве спин- $\frac{1}{2} \otimes$  спин- $\frac{1}{2}$  представления  $ASU(2)$  является тензором ранга  $(1, 0) \otimes (1, 0)$ . Бра-вектора являются тензорами ранга  $(0, 1)$ . При этом, конечно, необходимо также учитывать, что рассматриваемые объекты могут принадлежать различным представлениям  $ASU(2)$ . Так  $|m_1, \frac{1}{2}; m_2, 1\rangle$  является тензором ранга  $(1, 0) \otimes (1, 0)$  по спин- $\frac{1}{2}$  и спин-1 представлениям  $ASU(2)$  соответственно.

В общем случае, если группа  $G$  действует некоторым линейным представлением  $T$  в  $V$ , то ему ставят в соответствие так называемое контргradientное (к  $T$ ) представление:

○<sub>5.6</sub> Пусть задано представление  $T$  группы  $G$  в  $V$ . Контргradientным представлением называется такое представление  $G$  в  $V^*$ , что уравнение (5.17) остаётся неизменным.

Найдём закон действия контргradientного представления. По соглашению, базисные вектора в  $V^*$ , также как в  $V$ , считаются столбцами. Поэтому уравнение (5.17) можно переписать в виде

$$e^{*i}(e_j) = (e^{*i})^T e_j = \delta_j^i , \quad (5.21)$$

поскольку любой линейный оператор можно всегда представить в виде матрицы. Обозначим контргradientное представление как  $\bar{T}$ . Тогда по определению имеем

$$\delta_j^i = (e^{*k})^T (\bar{T}(g)^T)^i_k T(g)^l_j e_l = (\bar{T}(g)^T)^i_k T(g)^k_j . \quad (5.22)$$

Это однозначно фиксирует связь между  $\bar{T}$  и  $T$ :

$$\bar{T}(g) = (T(g))^{-1} . \quad (5.23)$$

Использование понятие тензоров позволяет находить инвариантные относительно действия группы выражения. А именно, если на  $V$  действует линейное представление  $T$  группы  $G$  матрицами  $\omega$ , то тензора преобразуются согласно правилу

$$\tilde{\psi} = \psi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_r} \omega_{i_1}^{k_1} e_{k_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_r}^{k_r} e_{k_r} \otimes \bar{\omega}_{l_1}^{j_1} e^{l_1} \otimes \dots \otimes \bar{\omega}_{l_r}^{j_r} e^{l_r} . \quad (5.24)$$

Соответственно, для компонент тензора имеем

$$\tilde{\psi}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_r} = \psi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_r} \omega_{i_1}^{k_1} \dots \omega_{i_r}^{k_r} \bar{\omega}_{l_1}^{j_1} \dots \bar{\omega}_{l_r}^{j_r} e^{l_r} . \quad (5.25)$$

По построению, объекты без индексов остаются неизменными при действии группы. Следовательно, комбинируя присутствующие в модели тензора таким образом, чтобы они образуют тензора ранга  $(0, 0)$ , можно получать инвариантные выражения.

**Пример 5.3.** Рассмотрим как используя понятие тензоров можно строить Лоренц-инвариантные выражения. Метрика Минковского  $\eta_{\mu\nu}$  является тензором ранга  $(0, 2)$ . Можно ввести сопряженную ей метрику  $\eta^{\mu\nu}$  согласно правилу

$$\eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda , \quad (5.26)$$

которая будет являться тензором ранга  $(2, 0)$ . Координата  $x^\mu$  является тензором ранга  $(1, 0)$ , а потому оператор частной производной,  $\partial_\mu$ , является тензором ранга  $(0, 1)$ . Пусть далее  $\varphi$  — некоторое поле, являющееся тензором ранга  $(0, 0)$ . Тогда из данных величин можно построить следующее Лоренц-инвариантное выражение

$$\partial_\mu \varphi \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi . \quad (5.27)$$

Для построения инвариантных выражений необходимо знать, существуют ли какие-либо численные тензора, не изменяющиеся при действии группы.

○<sub>5.7</sub> Тензор  $v$  называется инвариантным тензором, если его компоненты неизменны при действие группы.

Подобных особенных тензоров два. Первым из них является дельта-символ,  $\delta_j^i$ . Действительно, для произвольного преобразования имеем

$$\tilde{\delta}_\nu^\mu = \omega_\lambda^\mu (\omega_\nu^\rho)^{-1} \delta_\rho^\lambda = \delta_\nu^\mu . \quad (5.28)$$

Второй особенный тензор — символ Леви–Чивита  $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$ , где  $n$  — размерность рассматриваемого пространства. Однако, он инвариантен только для матричных представлений, детерминант которых равен  $+1$ :

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} = \omega_{\mu_1}^{\nu_1} \dots \omega_{\mu_n}^{\nu_n} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_n} = \det \omega \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} . \quad (5.29)$$

Помимо возможности использования инвариантных тензоров для построения лагранжианов теорий, они также позволяют разбивать сложные тензора на сумму более простых компонент.

**Пример 5.4.** Пусть  $B_\nu^\mu$  — некоторый тензор ранга  $(1, 1)$ . Тогда используя дельта–символ его можно разложить на две компоненты:

$$B_\nu^\mu = B \delta_\nu^\mu + A_\mu^\nu T, \quad A_\mu^\mu T = 0 . \quad (5.30)$$

Поскольку дельта–символ преобразуется сам в себя, то поле  $B_\nu^\mu$  распалось на два,  $B$  и  $A_\mu^\nu T$ , каждое из которых можно рассматривать независимо. Как мы увидим в дальнейшем, это соответствует выделению неприводимых представлений из тензора.

На практике также используется понятие псевдотензора:

- <sub>5.8</sub> Объект  $\psi \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$  называется псевдотензором, если при линейном действии группы  $G$  он преобразуется согласно правилу

$$\tilde{\psi} = \psi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \det \omega \omega_{i_1}^{k_1} e_{k_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_r}^{k_r} e_{k_r} \otimes \bar{\omega}_{l_1}^{j_1} e^{l_1} \otimes \dots \otimes \bar{\omega}_{l_r}^{j_r} e^{l_r} . \quad (5.31)$$

Как видно, разница между тензором и псевдотензором заключается в дополнительном факторе  $\det \omega$  в законе преобразования. Так, истинный тензор по группе Лоренца не изменяется при отражении координат, а псевдотензор меняет свой знак.

**Пример 5.5.** Если рассматривать матричные преобразования как с детерминантом  $+1$ , так и  $-1$ , то символ Леви–Чивита является псевдотензором.

Как и тензоры, псевдотензоры могут быть использованы для построения инвариантных величин. При этом, однако, необходимо комбинировать тензора и псевдотензора таким образом, чтобы итоговое выражение было истинным скаляром, то есть, тензором ранга  $(0, 0)$ .

## 5.4 Спиноры

Преобразования Лоренца являются симметрией природы, и потому всё объекты можно проклассифицировать по неприводимым представлением группы Лоренца. Это обуславливает важность знания всевозможных неприводимых представлений группы Лоренца, которыми спиноры. Покажем, как они возникают.



Заметим сначала, что поскольку метрика Минковского симметрична, то достаточно знать её действие только на пару одинаковых векторов. Действительно, если  $\vec{x}, \vec{y}$  — два произвольных вектора, то

$$\eta(x, y) = \frac{1}{2}(\eta(x + y, x + y) - \eta(x, x) - \eta(y, y)) . \quad (5.32)$$

Следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением интервалов вида  $\eta(x, x)$ :

$$x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 , \quad (5.33)$$

где  $\eta_{\mu\nu}$  была выбрана в виде  $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

Пусть  $\vec{x}$  — некоторый элемент пространства Минковского. Введём четвёрку матриц  $\sigma_\mu$ , в которой  $\sigma_0$  — единичная матрица, а  $\sigma_i$  — матрицы Паули. Они образуют базис в пространстве комплексных эрмитовых матриц два на два. Тогда  $\vec{x}$  можно поставить в соответствие эрмитову матрицу  $X$  по следующему правилу:

$$X = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} . \quad (5.34)$$

Данная формула устанавливает изоморфизм пространств Минковского и эрмитовых матриц два на два. Подчеркнём, что индекс  $\mu$  у матриц не является тензорным — он просто нумерует матрицы. Это оказывается очень удобным для переформулирования преобразований Лоренца через преобразования эрмитовых матриц. Ознакомимся для этого предварительно со структурой матриц  $\sigma_\mu$ .

Для матриц  $\sigma_\mu$  справедлива формула

$$\text{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2\delta_{\mu\nu} . \quad (5.35)$$

Поэтому взятие следа от произведения матриц можно рассматривать как скалярное произведение на пространстве эрмитовых матриц. Правой части этого выражения можно придать правильный тензорный вид (у дельта-символа должен быть один верхний индекс, и один нижний). Для этого вводят также матрицы  $\tilde{\sigma}_\mu$ :

$$\tilde{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\sigma_i) . \quad (5.36)$$

Тогда скалярное произведение можно переписать как

$$\text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu \sigma_\nu) = 2\delta_\nu^\mu , \quad \tilde{\sigma}^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \tilde{\sigma}_\nu . \quad (5.37)$$

Это позволяет также выразить координаты вектора из пространства Минковского через скалярное произведение на пространстве эрмитовых матриц:

$$x^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu X) . \quad (5.38)$$

Наиболее общее преобразование эрмитовой матрицы в эрмитову имеет вид

$$\tilde{X} = AXA^\dagger = \tilde{x}^\mu \sigma_\mu, \quad (5.39)$$

где  $A$  — произвольная комплексная матрица два на два. При этом если

$$\det A = \pm 1, \quad (5.40)$$

то подобные преобразования оставляют неизменным определитель матрицы, а потому и соответствующий интервал в пространстве Минковского. Следовательно, матрицы подобного рода являются аналогом преобразования Лоренца в пространстве эрмитовых матриц.

Матрицы  $A$  с единичным определителем образуют группу  $SL(2, \mathbb{C})$ , которая является универсальной накрывающей группы  $SO_+^\uparrow(1, 3)$ :  $SL(2, \mathbb{C})$  односвязна, а  $SO_+^\uparrow(1, 3)$  — нет. Докажем это утверждение пошагово.

*Задача 5.3.* Показать, что группа  $SL(2, \mathbb{C})$  связна, то есть, любой её элемент можно непрерывной деформацией перевести в любой другой.

*Утверждение 5.1* Формула

$$\Lambda_\nu^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu A \sigma_\nu A^\dagger). \quad (5.41)$$

устанавливает гомоморфизм групп  $SL(2, \mathbb{C})$  и  $SO_+^\uparrow(1, 3)$ , при котором элементы  $\pm A$  отображаются в один и тот же элемент  $SO_+^\uparrow(1, 3)$ .

▽ Пусть матрица  $X$  была отображена в некоторую другую эрмитову матрицу  $\tilde{X}$  под действием комплексной матрицы  $A$  согласно формуле (5.39). Тогда применяя ур. (5.38) можно найти компоненты разложения  $\tilde{X}$  по базису:

$$\tilde{x}^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu A x^\nu \sigma_\nu A^\dagger). \quad (5.42)$$

Преобразование  $A$  должно соответствовать некоторому преобразованию Лоренца, то есть

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu. \quad (5.43)$$

Сравнивая две формулы, приходим к выражению из утверждения, ур. (5.41).

Пусть два преобразования,  $A_1$  и  $A_2$ , задают одно и тоже преобразование Лоренца. Тогда должно выполняться

$$A_1 \sigma_\nu A_1^\dagger = A_2 \sigma_\nu A_2^\dagger \quad (5.44)$$

Умножая обе части уравнения на  $\tilde{\sigma}^\mu$  видно, что одно и тоже преобразование Лоренца соответствует только матрицам  $\pm A$ .

Покажем теперь, что  $\Lambda \in SO^\uparrow(1, 3)$ . Для этого рассмотрим сначала  $(0, 0)$  компоненту соответствия (5.41):

$$\Lambda_0^0 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^0 A \sigma_0 A^\dagger) = \frac{1}{2} \text{Tr}(AA^\dagger) > 0. \quad (5.45)$$

Следовательно, преобразование является ортохронным.

Для нахождения определителя матрицы  $\Lambda$ , рассмотрим сначала частный случай, когда  $A = E$ . Тогда

$$\det \Lambda = 1. \quad (5.46)$$

Как следует из задачи, многообразие  $SL(2, \mathbb{C})$  связно. В силу этого для произвольной матрицы  $A$  определитель  $\Lambda$  будет также равен единице — переход на другую компоненту связности  $O(1, 3)$ , для которых определитель равен минус единице, невозможен.

Остаётся показать, что формула (5.41) определяет гомоморфизм групп, то есть, согласованна с групповым умножением в обоих группах. Для этого заметим, что для  $\tilde{X}$  должно выполняться следующее соотношение:

$$AXA^\dagger = x^\mu A \sigma_\mu A^\dagger = x^\nu \Lambda_\nu^\mu \sigma_\mu. \quad (5.47)$$

Это возможно только в том случае, если

$$A \sigma_\mu A^\dagger = \sigma_\nu \Lambda_\mu^\nu. \quad (5.48)$$

Данная формула эквивалентна ур. (5.41: взятие скалярного произведения напрямую приводит к ур. (5.41). Следовательно, её можно взять в качестве уравнения, определяющего матрицу  $\Lambda$  через матрицу  $A$ ,  $\Lambda = \Lambda(A)$ . Тогда для композиции преобразований  $A_1, A_2 \in SL(2, \mathbb{C})$  имеем

$$\sigma_\mu \Lambda_\nu^\mu(A_1 A_2) = (A_1 A_2) \sigma_\nu (A_1 A_2)^\dagger = A_1 \sigma_\rho \Lambda(A_2)_\nu^\rho A_1^\dagger = \sigma_\mu \Lambda(A_1)_\rho^\mu \Lambda(A_2)_\nu^\rho. \quad (5.49)$$

Таким образом,

$$\Lambda(A_1 A_2)_\nu^\mu = \Lambda(A_1)_\rho^\mu \Lambda(A_2)_\nu^\rho, \quad (5.50)$$

и отображение (5.41) является гомоморфизмом групп.  $\triangle$

*Задача 5.4.* Доказать, что группа  $SL(2, \mathbb{C})$  односвязная. *Указание:* показать, что  $SL(2, \mathbb{C})$  как многообразие изоморфно  $\mathbb{R}^3 \times M$ , где  $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1\}$ .

*Задача 5.5.* Показать, что  $SO^\uparrow(1, 3)$  не односвязна.

Поскольку элементы  $\pm A \in SL(2, \mathbb{C})$  соответствуют одному и тому же элементу из  $SO_+^\uparrow(1, 3)$ , то говорят, что  $SL(2, \mathbb{C})$  двулистно накрывает  $SO_+^\uparrow(1, 3)$ .

Поскольку  $SL(2, \mathbb{C})$  является универсальной накрывающей  $SO_+^\uparrow(1, 3)$ , то рассмотрение всевозможных представлений  $SL(2, \mathbb{C})$  позволяет получить все представления  $SO_+^\uparrow(1, 3)$ . У группы  $SL(2, \mathbb{C})$  есть три независимых матричных представления: фундаментальное, сопряженное и контргradientное. При этом имеет место утверждение, которое будет сформулировано в виде задачи

**Задача 5.6.** Показать, что фундаментальное представление  $SL(2, \mathbb{C})$  эквивалентно контргradientному, но не эквивалентно сопряжённому.

Как следствие, у группы  $SL(2, \mathbb{C})$  есть два типа тензоров: преобразующихся по фундаментальному и сопряженному представлениям соответственно.

○<sub>5.9</sub> Комплексный вектор  $\xi \in \mathbb{C}^2$ , преобразующийся по фундаментальному (сопряженному) представлению  $SL(2, \mathbb{C})$ , называется (сопряженным) Вейлевским спинором.

Чтобы различать два типа спиноров принято вводить обычные индексы и индексы с точкой:  $\alpha$  и  $\dot{\alpha}$ . Обычные индексы используются для обозначения Вейлевских спиноров, а с точкой — для сопряженных. В частности, как следует из формулы (5.39), матрицы  $\sigma_\mu$  имеют один обычный индекс, и один с точкой:

$$(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} . \quad (5.51)$$

○<sub>5.10</sub> Тензор вида

$$\psi = \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_q} e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes e_{\dot{\alpha}_1} \otimes \dots \otimes e_{\dot{\alpha}_q} , \quad (5.52)$$

где  $e_{\alpha_i}$ ,  $e_{\dot{\alpha}_j}$  преобразуются по фундаментальному и сопряженному представлениям соответственно, называются спин-тензорами ранга  $(p, q)$ .

**Пример 5.6.** Как следует из построения, простейшим возможным объектом пространства представления  $SL(2, \mathbb{C})$  является двухмерный комплексный Вейлевский спинор:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} , \quad (5.53)$$

где  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  — комплексные вектора. При преобразовании Лоренца  $\Lambda$  спинор  $\xi$  преобразуется согласно закону

$$\tilde{\chi} = A \chi , \quad (5.54)$$

где матрица  $A$  определяется из ур. (5.48). При этом знак решения фиксируется условием, что тождественному преобразованию Лоренца соответствует единичная матрица  $A$ .

Предполагается, что нейтрино является Вейлевским спинором.

**Пример 5.7.** Электрон описывается при помощи Вейлевского спинора  $\xi$  и сопряженного Вейлевского спинора  $\bar{\chi}$ :

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} , \quad (5.55)$$

где  $\psi$  — описывающий электрон вектор. Таким образом электрон является элементом  $\mathbb{C}^4$ .

○<sub>5.11</sub> Спиноры вида (5.55) называются Дираковскими спинорами.

Из формулы (5.39) также видно, что любому эрмитовому спин-тензору ранга  $(n, n)$  можно поставить в соответствие обычный тензор ранга  $(n, 0)$ . Проиллюстрируем это утверждение на примере спин-тензора ранга  $(1, 1)$ . Для подобного объекта  $Y$  закон преобразования можно записать в виде, аналогичном (5.39). По условию,  $Y$  является эрмитовой матрицей. Но тогда исходя из формулы (5.34) можно ввести следующие четыре числа:

$$y^0 = \frac{1}{2}(Y^{1\dot{1}} + Y^{2\dot{2}}), \quad y^3 = \frac{1}{2}(Y^{1\dot{1}} - Y^{2\dot{2}}), \quad y^1 = \frac{1}{2}(Y^{1\dot{2}} + Y^{2\dot{1}}), \quad y^2 = \frac{1}{2}(Y^{1\dot{2}} - Y^{2\dot{1}}). \quad (5.56)$$

Поскольку матрица  $Y$  эрмитова, то все  $y^\mu$  действительны, а потому их можно отождествить с компонентами некоторого тензорного представления  $ASO(1, 3)$  ранга  $(1, 0)$ . При этом спин-тензорные преобразования над  $Y$  эквивалентны тензорным преобразованием над числами  $y^\mu$  согласно формуле (5.41).

Указанное соответствие распространяется на тензора больших рангов очевидным способом: если  $W^{\mu_1 \dots \mu_n}$  являются компонентами тензора ранга  $(n, 0)$  по группе Лоренца, то

$$S_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_n} \equiv (\sigma_{\mu_1})^{\alpha_1 \dot{\alpha}_1} \dots (\sigma_{\mu_n})_{\alpha_n \dot{\alpha}_n} W^{\mu_1 \dots \mu_n} \quad (5.57)$$

является спин-тензором ранга  $(n, n)$ .

Из всего сказано следует следующий вывод:

*Спин-тензорные представления позволяют построить произвольное представление ортохронной группы Лоренца. При этом обычные тензора выражаемы через спин-тензоры, а обратное, вообще говоря, невозможно.*

Алгебра группы  $SL(2, \mathbb{C})$ , как комплексная алгебра, является трехмерным векторным пространством. Пусть  $A_i$  образуют базис в  $ASL(2, \mathbb{C})$ , и обозначим алгебру, получаемую как линейную оболочку данных генераторов с произвольными действительными числами как  $ASL(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ . Тогда можно легко показать, что

$$ASL(2, \mathbb{C}) = ASL(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \oplus iASL(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}. \quad (5.58)$$

В силу того, что матрицы из  $SL(2, \mathbb{C})$  имеют единичный определитель, генераторы  $ASL(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$  являются бесследовыми комплексными матрицами. Тогда генераторы  $A_i$  алгебры  $ASL(2, \mathbb{C})$  можно выбрать таким образом, что  $ASL(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$  будет изоморфно  $ASU(2)$ , которая также состоит из бесследовых матриц и имеет размерность три. Поэтому имеем

$$ASL(2, \mathbb{C}) = ASU(2) \oplus ASU(2). \quad (5.59)$$

Данное соотношение показывает, что представления  $ASL(2, \mathbb{C})$ , а, значит, и  $ASO^\uparrow(1, 3)$ , можно напрямую получать из представлений  $ASU(2)$ . При этом поскольку алгебра  $ASL(2, \mathbb{C})$

распалась в прямую сумму подалгебр, то все представления  $ASL(2, \mathbb{C})$  являются комбинациями двух копий  $ASU(2)$ . В свою очередь это означает, что произвольное представление  $ASL(2, \mathbb{C})$  можно однозначно охарактеризовать через пару чисел

$$(n, m), \quad (5.60)$$

где  $n$  и  $m$  являются наивысшим весом для каждой из алгебр  $ASU(2)$  соответственно.

Получаемые таким образом представления, конечно, согласованы со спин-тензорными и тензорными представлениями соответственно. Например, Вейлевский спинор является представлением  $(\frac{1}{2}, 0)$  алгебры  $ASL(2, \mathbb{C})$ , а сопряженный ему —  $(0, \frac{1}{2})$ .

*Задача 5.7.* Исходя из определения Дираковского спинора, определить его представление как представление  $ASL(2, \mathbb{C})$ .

Заметим, однако, что выше было построено накрытие ортохронной группы Лоренца, являющейся подгруппой группы Лоренца. Построение полного накрытия приводит к введению так называемых матриц Дирака для накрытия  $P$  и  $T$  преобразований из группы Лоренца и не вводит новых представлений. Здесь мы не будем приводить соответствующую конструкцию.

## 5.5 Неоднородные симметрии

В параграфе 3.2 было показано, что симметрии физических систем можно конструктивно определять через симметрии билинейных форм, соответствующих наблюдаемым величинам. В проведенном рассмотрении, однако, неявно подразумевалось, что все вектора откладываются от заранее выбранного начала координат. Это приводит к тому, что на пространстве есть выделенная точка — начало координат, а законы физики могут зависеть от точки к точке. На практике необходимо иметь конструкцию, которая позволяла строить однородные пространства — такие, в которых все точки равноправны. Самая очевидная мотивация для этого приходит из эксперимента — известно, что наблюдаемый мир однороден.

Желаемую конструкцию можно легко получить, перейдя к рассмотрению свободных векторов:

○<sub>5.12</sub> Свободным вектором называется вектор, начало которого может быть совмещено с любой точкой пространства.

Если  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  — два обычных вектора, откладываемых от начала координат, то свободный вектор можно получить как разность данных векторов:

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{y}. \quad (5.61)$$

В дальнейшем мы будем использовать  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  для обозначения свободных векторов. Тогда если рассматривать билинейные формы как функции свободных векторов, то пространства будут автоматически однородными.

**Пример 5.8.** В специальной теории относительности интервал

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (5.62)$$

определён через свободные вектора — бесконечно малые смещения в произвольной точке пространства.

Рассмотрим каковы симметрии однородных пространств. Пусть  $g(\vec{u}, \vec{v})$  — некоторая билинейная функция свободных векторов. Тогда, во-первых, все симметрии  $g(\vec{u}, \vec{v})$  как функции закрепленных векторов остаются симметриями. Обозначим их набор как  $\{\Lambda\}$ . Во-вторых, появляется новая симметрия в виде сдвига начала координат, а, значит, и всех закрепленных векторов, на произвольный вектор  $\vec{a}$ . Действительно, подобное преобразование оставляет свободные вектора неизменными, и потому является симметрией. Обозначим множество таких симметрий через  $\{a\}$ . Множество преобразований  $\{\Lambda\}$ ,  $\{a\}$ , и их комбинации образуют полный набор симметрий такой физической системы.

В общем случае для установления алгебраических свойств симметрий необходимо ввести понятие параллельного переноса векторов на множестве. Дело в том, что на произвольном многообразии смещение векторов вдоль вектора  $\vec{a}$  может привести к их изменению. Например, это имеет место при параллельном переносе векторов на сфере. Ниже мы рассмотрим случай, представляющий наибольший интерес в физике — когда вектора не изменяются при параллельном переносе, а  $g$  является метрикой Минковского.

Для пространства Минковского удобно записывать наиболее общий вид преобразования симметрии,

$$\tilde{x}_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu \quad (5.63)$$

где  $\Lambda \in SO(1, 3)$ , а  $a_\mu$  — некоторый четырёх-вектор, в виде

$$(\Lambda, a) . \quad (5.64)$$

В этих терминах для композиции преобразований симметрий имеем

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, a_2 + \Lambda_2 a_1) . \quad (5.65)$$

○<sub>5.13</sub> Множество упорядоченных элементов вида (5.64) с групповым законом умножения (5.65) называется группой Пуанкаре,  $ISO(1, 3)$ .

В группе Пуанкаре можно выделить две подгруппы. Первая из них состоит из элементов вида

$$(\Lambda, 0) \quad (5.66)$$

и изоморфна группе Лоренца. Как выглядит данная группа и соответствующая алгебра было рассмотрено выше.

Вторая подгруппа состоит из преобразований вида

$$(1, a) , \quad (5.67)$$

и, таким образом, изоморфна  $\mathbb{R}^4$ . На пространстве Минковского она реализована в виде сдвига координат, что и обуславливает обозначение группы Пуанкаре как добавление буквы  $I$  (inhomogeneous) к  $SO$ . Для композиции сдвигов имеем

$$(1, a_1)(1, a_2) = (1, a_1 + a_2) . \quad (5.68)$$

Видно, что результирующее преобразование не зависит от порядка применения преобразований. Следовательно данная подгруппа является абелевой. Также легко заметить, что эти две подгруппы не коммутируют:

$$(\Lambda, 0)(1, a) = (\Lambda, \Lambda a) , \quad \text{а} \quad (1, a)(\Lambda, 0) = (\Lambda, a) . \quad (5.69)$$

Узнаем как выглядят алгебра группы Пуанкаре. Алгебра группы Лоренца уже была изучена выше. Обозначим генераторы сдвигов как  $P_\mu$ . Поскольку группа сдвигов изоморфна  $\mathbb{R}^4$ , то имеется всего четыре генераторов сдвига. Поскольку соответствующая группа является абелевой, то

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 . \quad (5.70)$$

Найдём как реализованы (то есть, явный вид представления)  $P_\mu$  в пространстве Минковского, индуцируя представления сдвигов (элементов группы) на представление алгебры. Пусть  $\vec{a} \in \mathbb{R}^4$ , то есть, некоторый элемент алгебры, тогда

$$(1, \epsilon \vec{a}) \vec{x} = \vec{x} + \epsilon \vec{a} = \vec{x} + \epsilon \tilde{T}(\vec{a}) \vec{x} , \quad (5.71)$$

где  $\epsilon$  — малый параметр, а  $\tilde{T}$  — представление алгебры. Отсюда следует, что

$$\tilde{T}(\vec{a}) = a^\mu \partial_\mu ; \quad (5.72)$$

Удобно в качестве генераторов алгебры выбрать представления базисных векторов из  $\mathbb{R}^4$ :

$$P_\mu \equiv \tilde{T}(e_\mu) = \partial_\mu , \quad (5.73)$$

что и задаёт дифференциальным представлением генераторов сдвигов в пространстве Минковского.

Зная представление генераторов сдвигов можно найти коммутационные соотношения между алгебрами сдвигов и преобразований Лоренца. Действительно, в любом представлении операторы должны иметь те же коммутационные соотношения, что и элементы алгебр. Поэтому из формул (4.62) и (5.73) получаем

$$[P_\mu, L_{\lambda\rho}] = \eta_{\mu\rho} P_\lambda - \eta_{\mu\lambda} P_\rho . \quad (5.74)$$



Поскольку

Заметим, что если  $P_\mu a^\mu$  — произвольный элемент алгебры, то  $e^{P_\mu a^\mu}$  является элементом группы. Тогда

$$(1, e^{P_\mu a^\mu})\vec{x} = \vec{x} + \vec{a}. \quad (5.75)$$

В силу данного свойства элементы группы сдвигов практически всегда записывают как экспоненты от соответствующих генераторов.

Задача 5.8. Элементы группы Лоренца можно также представить как экспоненты от элементов алгебры. Используя данный факт, найти коммутационные соотношения между генераторами трансляций и преобразований Лоренца из формулы (5.69).

Если на пространстве Минковского определено некоторое поле  $\psi$ , то действие группы Пуанкаре определяется следующим образом:

$$T(\Lambda, \vec{a})\vec{x} = \Lambda\vec{x} + \vec{a}, \quad T(\Lambda, \vec{a})\psi(x) = \hat{\Lambda}\psi(\Lambda x + a), \quad (5.76)$$

где  $\hat{\Lambda}$  — представление группы Лоренца, по которому преобразуется поле  $\psi$ . Из данной формулы также следует действие алгебры группы Пуанкаре на поля.

Задача 5.9. Показать, что выписанные операторы действительно образуют представление группы Пуанкаре.

Обратим внимание на то, что хотя группа Пуанкаре действует неоднородно на пространстве Минковского (трансляции сдвигают координату), это не означает, что она не является матричной группой. Наоборот, имеет место следующий гомоморфизм:

$$(\Lambda, a) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \Lambda & a^T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.77)$$

сохраняющий групповое умножение. Таким образом группа Пуанкаре является матричной группой, но её представление на пространстве Минковского не представимо в виде действия матриц.

Задача 5.10. Найти квадратичные операторы Казимира для группы Пуанкаре. Построить алгебру Картана группы Пуанкаре и установить физический смысл соответствующих собственных чисел.