Лагранжианы свободных полей.

Пусть $\phi(x)$-комплексное поле, скаляр по группе Лоренца. Для свободного поля действие

$$S = \int \mathrm{d}^4x(\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi) \tag{1}$$

инвариантно относительно глабальных преобразований с действителным α

$$\phi \to \phi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi(x).$$

Про такое преобразование говорят, что оно глобальное и внутреннее. В этом контексте глобальное означает лишь то, что α не зависит от координат. Словом "внутреннее"подчеркивают, что преобразуются только поля (например, если бы мы отдельно рассматривали действительную и мнимую составляющие ϕ). Отметим, что лагранжева плотность (1) не изменяется при таких преобразованиях. Соответствующий глобальным преобразованиям ток выглядит как

$$j_\mu = -\mathrm{i}(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*). \tag{2}$$

Лагранжиан электромагнитного поля $A_\mu(x)$ (4 действительные компоненты) – вектора по группе Лоренца определяют через тензор напряженности поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3}$$

Эта величина инвариантна относительно локальных калибровочных преобразований

$$A_\mu \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x).$$

В этом случае $\alpha(x)$ уже является функцией координат, что подчеркнуто термином "локальное"преобразование. Действие для свободного электромагнитного поля выглядит как

$$S = \int \mathrm{d}^4x(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}). \tag{4}$$

Через трехмерные векторы напряженности $F_{\mu\nu}$ выражается как

$$F_{0i} = E_i, \qquad F_{ij} = -\epsilon_{ijk}H_k, \qquad \epsilon_{123} = 1.$$

В этой формуле у $F_{\mu\nu}$ используются нижние лоренцевы индексы (сворачиваются с помощью метрики Минковского), а у E_i, H_k, ϵ_{ijk} используются трехмерные индексы (сворачиваются с помощью метрики Евклида). Дуальные величины определяются при помощи четырехмерного полностью антисимметричного тензора $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ ($\epsilon^{0123} = 1$)

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\rho\lambda}$$

и удовлетворяют тождеству Бьянки

$$\partial^\mu\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv 0 \tag{5}$$

Литература:

В.А. Рубаков, Классические калибровочные поля, ч.1 (бозонные теории);
К.В. Степаньянц, Классическая теория поля;
Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля (том 2).

Задачи.

1. Используя уранения движения в теории (1), показать, что ток (2) сохраняется.

2. Проверить тождество Бьянки (5).

3. Изменит ли уравнения движения в теории (4) добавочное слагаемое в лагранжевой плотности вида $\tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$?

4. Не фиксируя калибровочное условие найти общее решение для поля A_μ в теории (4).

5. Найти (нетеровский) тензор энергии-импульса для электромагнитного поля в теории (4). Его можно симметризовать, не нарушая условие сохранения так, что новый тензор будет выражаться только через калибровочно-инвариантные величины $F_{\mu\nu}$. Чему равен след $\tilde{T}^\mu_\mu$ симметричного тензора энергии-импульса?

6. Симметрию относительно преобразований Лоренца

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + {\omega_\mu}^\nu x_\nu$$

   можно использовать (по аналогии с трансляционной симметрией) для вывода сохраняющихся величин (тензор углового момента). В теории действительного скалярного поля найти эти величины и выразить их через компоненты тензора-импульса. Найти тензор углового момента в теории (4).