

## Условия сдачи экзамена по курсу “Введение в астрофизику частиц” МФТИ, декабрь 2022

- Для успешной сдачи экзамена необходимо решить дома и сдать преподавателю несколько задач. Задачи разделены на три группы: простые, средние и сложные. Необходимо полностью решить 3 простых задачи или 2 средних или 1 сложную или 2 простых и 1 среднюю.
- Каждая задача, независимо от сложности, сдается только одним студентом. Как только кто-то начал ее сдавать, она считается использованной; другой человек уже не сможет ее сдавать, даже если первый потом передумает (как электронный билет на концерт). Задач более чем достаточно, чтобы все могли получить высший балл.

### Простые задачи

- 2.1. Рассмотрим звезду с массой  $M \sim 12M_{\odot}$ , радиусом  $R \sim 5R_{\odot}$ , массой центрального ядра  $M_c \sim M_{\odot}$ . Оценить гравитационную энергию, высвобождающуюся при коллапсе ядра в нейтронную звезду радиусом  $R_{NS} \sim 10$  км. Оценить энергию, требуемую для сброса оболочки (то есть частей звезды, не вошедших в ядро). Сравнить эти два значения энергии.
- 2.2. Пренебрегая давлением, найти скорость движения коллапсирующего вещества на расстоянии  $R$  от центра ядра пре-сверхновой. Оценить время коллапса ядра массы  $M_c \sim M_{\odot}$  (от момента “выключения” давления до размера  $R_{NS} \sim 10$  км, когда коллапс остановится за счет новых источников давления).
- 2.3. Согласно современным космологическим представлениям, Вселенная заполнена газом реликтовых нейтрино с температурой  $\sim 2$  К и концентрацией нейтрино каждого типа  $\approx 112 \text{ см}^{-3}$  (эти величины соответствуют настоящему моменту времени, то есть справедливы в окрестностях нашей Галактики). Ограничить сверху сечение нейтрино-нейтринного взаимодействия при соответствующих энергиях на основе того факта, что нейтрино от SN1987A не рассеялись на реликтовых нейтрино. Каким энергиям в системе центра масс соответствует это ограничение?
- 2.4. В 2011 году коллаборация OPERA, регистрирующая в Италии нейтрино, рожденные в ускорителе в CERN, обнародовала результаты измерения скорости нейтрино  $v$ , указывающие на движение этих частиц несколько быстрее скорости света,  $v - 1 \approx 2.48 \times 10^{-5}$  (впоследствии этот результат был объяснен плохо соединенным разъемом). Показать, что первоначальный результат OPERA трудно согласовать с регистрацией нейтрино от SN1987A. Подумать, как все же можно было бы объяснить оба результата одновременно?
- 2.5. Вывести условие гидростатического равновесия для звезды. Вывести из него теорему вириала для звезды. Оценить температуру звезды, зная ее массу и радиус.
- 2.6. Показать, что радиус нормальной звезды приблизительно пропорционален ее массе.

- 2.7. Рассмотрим первичную плазму Вселенной. На лекции соотношение эффективных температур фотонов  $T_\gamma$  и нейтрино  $T_\nu$  при общей температуре плазмы  $T < 500$  кэВ было дано без вывода. Вывести это соотношение. Вычислить плотность числа реликтовых нейтрино в современной Вселенной.
- 2.8. Найти энергию фотонов мишени для процесса  $p\gamma$ , дающего нейтрино с энергией 100 ТэВ.
- 2.9. Учитывая кинематику распадов  $\pi$ -мезонов, вывести приближенное соотношение между потоками родившихся из них нейтрино и фотонов,

$$\int \Phi_\gamma(E_\gamma) dE_\gamma \approx 2 \int \Phi_\nu(E_\nu) dE_\nu.$$

- 2.10. Найти вероятность детектирования, в результате случайного совпадения, 5 не связанных со сверхновой нейтринных событий в любой 10-секундный промежуток времени в течение 5 часов перед оптической вспышкой близкой сверхновой, если детектор в среднем регистрирует 1 случайное событие в 7 минут, работал 6 лет, за которые вспышка близкой сверхновой случилась 1 раз.

### Средние задачи

- 4.1. Найти оптимальную цель для непрямого поиска распадающейся темной материи массой 10 и 100 ГэВ и временем жизни  $10^{25}$  с, оценить поток. Считать что половина энергии уходит в фотоны.
- 4.2. Пусть сечение взаимодействия частиц ТМ с протонами  $10^{-38}$  см<sup>2</sup>, а масса ТМ — 100 ГэВ. Оценить соответствующий нейтринный поток из центра Солнца и Земли (Землю для простоты считать железной).
- 4.3. Сколько энергии выделяется при аннигиляции темной материи с каноническим сечением во всём гало Млечного пути ( $M = 1; 10; 100$  ГэВ)? Как меняется предсказание в случае перехода от cusp к core профилю (NFW  $\rightarrow$  Burkert)?
- 4.4. Рассмотрим первичную плазму Вселенной. Показать, что при высоких температурах (больше масс всех частиц) и малых химических потенциалах разности плотностей числа частиц и античастиц определенной спиральности равны:  $\Delta n = \mu \frac{T^2}{3}$  для бозонов и  $\Delta n = \mu \frac{T^2}{6}$  для фермионов, где  $\mu$  — химический потенциал для соответствующего типа частиц, причем считается, что  $\mu \ll T$ .
- 4.5. Найти разности плотностей частиц и античастиц (асимметрии) для всех типов ультрарелятивистских частиц в равновесной электронейтральной среде при температуре  $T = 400$  МэВ, считая известными плотности барионного и лептонных чисел:  $n_B, n_{L_e}, n_{L_\mu}, n_{L_\tau}$ , причем  $n_B, n_{L_e}, n_{L_\mu}, n_{L_\tau} \ll T^3$ .
- 4.6. Пусть ультрарелятивистский протон с энергией  $E$  влетает в равновесную электрон-протонную плазму с температурой  $T \ll m_e$  и некоторой плотностью числа частиц  $n$ . Оценить за какое время этот протон потеряет энергию и окажется в равновесии с плазмой.

- 4.7. На лекции была получена оценка светимости источников галактических космических лучей необходимой для поддержания их наблюдаемого потока. Получить аналогичную оценку светимости (из единицы объема Вселенной) для внегалактических космических лучей. Считать что спектр в источниках пропорционален  $\frac{dN}{dE} \sim E^{-2}$ , а наблюдаемый на Земле поток КЛ является внегалактическим начиная с  $E = 10^{18}$  эВ.
- 4.8. Пусть блазар с красным смещением  $z = 0.05$  является источником космических лучей сверхвысокой энергии: протонов с энергией  $E = 10^{20}$  эВ (в системе отсчета наблюдателя). Предположим, что источник окружен областью магнитного поля  $B$  радиусом  $r = 0.5$  Мпк. Оценить характерную энергию и регистрируемый наблюдателем поток синхротронных гамма-квантов, если регистрируемый поток таких космических лучей  $F = 0.01$  км<sup>-2</sup> год<sup>-1</sup>. Оценить угловой размер получившегося протяженного источника. Поле считать однородным по величине и случайным по направлению; рассмотреть случаи  $B = 10^{-6}$  Гс и  $B = 10^{-9}$  Гс. Потерями на пути между областью магнитного поля и наблюдателем пренебречь.
- 4.9. Гамма-кванты достаточно высоких энергий при прохождении через Солнечную систему могут интенсивно рождать электрон-позитронные пары на солнечном излучении. Считая спектр Солнца тепловым с температурой 0.5 эВ, оценить энергию гамма-излучения, для которой данный эффект будет существенным. Описать количественно влияние этого эффекта на изображения точечных гамма-источников и на диффузный гамма-фон при таких энергиях. На каких расстояниях от Солнца эффект становится существенным?

### Сложные задачи

- 8.1. Оценить максимальную энергию, до которой может разогнаться протон в магнитосфере нейтронной звезды. Считать магнитное поле диполем со значением  $10^{12}$  Гс у поверхности звезды; радиус звезды 10 км; электрическое поле по порядку величины равно магнитному. Начальная скорость попавшего в эту систему извне протона может быть произвольной.
- 8.2. Предположим, что холодная темная материя состоит из частиц массы  $m$ , взаимодействующих с видимым веществом только гравитационно, а между собой с сечением  $\sigma$ . Ограничить параметры такой темной материи из данных о строении и эволюции Солнца.
- 8.3. Пусть угловое разрешение нейтринного телескопа составляет примерно  $\theta$ . Пусть есть популяция источников, в среднем равномерно распределенная по Вселенной с такой плотностью, что математическое ожидание для расстояния от нас до ближайшего источника составляет примерно  $D$ . Какова вероятность того, что сперва будет обнаружен ближайший источник, а потом уже – диффузный поток от неразрешенных далеких источников?
- 8.4. Протоны сверхвысоких энергий, взаимодействуя с фотонами реликтового излучения, могут интенсивно рождать  $\pi$ -мезоны, что приводит к быстрой потере энергии прото-

на (эффект Грейзена–Зацепина–Кузьмина, ГЗК). Как следствие, в спектре космических лучей появляется “ГЗК-обрезание”: высокоэнергичные протоны приходят к нам из части Вселенной, ограниченной длиной свободного пробега  $l_{\text{GZK}}$  по отношению к ГЗК-процессу, а протоны более низких энергий – со всей Вселенной. На лекции было выведено значение энергии обрезания:  $E_{\text{GZK}} = 7 \cdot 10^{19}$  эВ.

- (а) Используя спектр изотропного диффузного гамма-излучения Fermi-LAT, ограничить плотность энерговыделения (эВ/Мпк<sup>3</sup>) в космических протонах с энергиями выше  $E_{\text{GZK}}$  во Вселенной на расстояниях  $> l_{\text{GZK}}$  от нас. Для оценки можно пренебречь космологическими эффектами, считая радиус Вселенной равным 4 Гпк.
- (б) Используя спектр космических лучей Telescope Array, оценить ту же величину на расстояниях  $< l_{\text{GZK}}$ , считая, что все космические лучи – протоны.

8.5. Протоны  $p$  сверхвысокой энергии  $E$ , взаимодействуя с фоновыми фотонами  $\gamma$ , могут рождать  $\pi$ -мезоны в реакции с образованием  $\Delta$ -бариона в промежуточном состоянии, что приводит к быстрой потере энергии протона (обобщение эффекта Грейзена–Зацепина–Кузьмина, ГЗК, на случай, когда фотоны не обязательно реликтовые). Оцените время жизни протона с энергией  $E$  в нашей Галактике по отношению к двум процессам – вылетанию из магнитного поля Галактики и описанному взаимодействию с фотонами, в зависимости от  $E$ . Считать, что взаимодействие происходит только за счет рождения  $\Delta$ , а соответствующее сечение найти в литературе.

8.6. Пусть протон сверхвысокой энергии  $E$  излучается источником находящимся на расстоянии  $L$  от Земли и далее распространяется в крупномасштабном магнитном поле  $B$  имеющем корреляционную длину (длину на которой направление поля неизменно)  $\lambda$ . Вывести формулу для угла отклонения такого фотона от направления на его источник в зависимости от  $E$ ,  $L$ ,  $B$  и  $\lambda$ . Эффект ГЗК не учитывать.